פרק 2:
פונקצית הביקוש

בפרק 1 ראינו את צורת עקומת הביקוש, וטענו שבאופן כללי, העקומה מראה, שבמחירים שונים הצרכן מעוניין לרכוש כמויות שונות. הטענה הייתה שבד"כ ככל שהמחיר נמוך יותר נרצה לרכוש כמות גדולה יותר מהמוצר. ניתן לראות יחסים אלה אם נבדוק את הרכישות של צרכנים, במחקרים אמפיריים. כלכלנים אינם מסתפקים בתיאור התופעה במציאות. הם רוצים גם להבין אותה ולהסביר אותה. לפיכך, כלכלנים פיתחו תאוריה, שבעזרתה "ניגזור" את עקומת הביקוש, כפי שנראה בפרק זה. היתרון בפיתוח תיאוריות הוא בכך, שהן מאפשרות לבצע תחזיות לגבי מצבים עתידיים, או לחילופין לנתח מצבים היפותטיים. אם התחזיות אמנם תתממשנה, נוכל לטעון שהתיאוריה משביעת רצון. אם התחזיות תהיינה שגויות, נציע תאורייה אחרת.
בפרק זה נציג תיאוריה, המאפשרת, בעזרת הנחות פשוטות, לגזור את עקומת הביקוש, ומספקת תחזיות טובות.

הצרכן מעוניין לצרוך יותר מכל אחד מהמוצרים בשל חוסר הרוויה הקיימת, אולם הוא מוגבל באמצעים העומדים לרשותו. השאלה היא מהם המוצרים שייצרוך, ובאילו כמויות.

נניח, שהצרכן חי בעולם בו שני מוצרים בלבד – X, Y. הוא צריך להקצות את הכנסתו בין שני המוצרים, ולקנות כמויות qx, qy כאשר נתונים לו מחירי המוצרים P_x, P_y והכנסתו I.

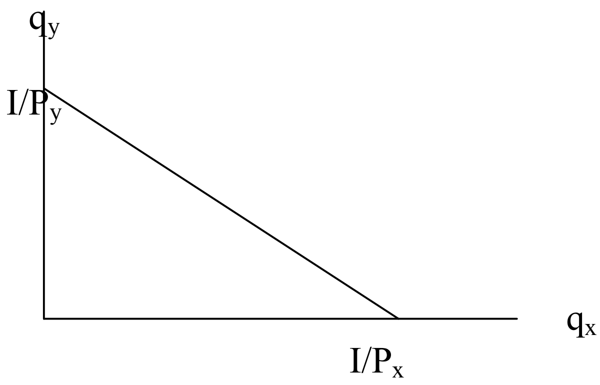
2.1 __מגבלת התקציב__

ההכנסה של הצרכן מהווה מגבלה מבחינתנו. זהו סך התקציב העומד לרשותו.
מגבלת התקציב של הצרכן היא, שההוצאה על כלל המוצרים, ובהנחות שלנו - על שני המוצרים, תהיה קטנה או שווה להכנסתו. כאשר ההוצאה על מוצר בודד, היא המכפלה של מחיר המוצר במספר היחידות הנרכשות. למשל, אם מחיר ליחידה הוא חמישה ש"ח ונרכשות חמש יחידות, סך ההוצאה היא 25 ש"ח. ההוצאה תסומן ע"י המכפלה P_xq_x. מגבלת התקציב היא:

$$P_xq_x + P_yq_y \leq I$$

בהנחה שהמוצרים מתחלקים (divisible) וניתן לצרוך גם כמויות לא שלמות הרי אין משמעות לאי השוויון, כי בהנחת המחסור הצרכן תמיד יעדיף יותר על פחות, ולא ייתכן שלא ישתמש בכל הכנסתו. לפיכך, סך ההוצאה על שני המוצרים יהיה שווה בדיוק לסך ההכנסה. בעולם זה של שני מוצרים בלבד, אין חושבים על העתיד ולכן אין חסכון.
ניתן לתאר את מגבלת התקציב באופן גרפי במישור דו-מימדי; כאשר הצרכן מוציא את כל הכנסתו על שני המוצרים בלבד. נכנה קו זה, *'קו התקציב'*. משואת הקו היא:

$$P_xq_x + P_yq_y = I$$



תרשים 2.1: קו תקציב המתאר את מגבלת ההכנסה של הצרכן

הכמות המכסימלית ממוצר X, כאשר רוכשים אפס יחידות Y, היא $q_x^{\max} = \dfrac{I}{P_x}$

הכמות המכסימלית ממוצר Y, כאשר רוכשים אפס יחידות X, היא $q_y^{\max} = \dfrac{I}{P_y}$

קו התקציב הוא קו לינארי

$$q_y = I/P_y - P_x q_x / P_y$$

בו I/P_y הוא החותך, ו- P_x/P_y שפוע הקו.

כאשר הכנסתו של הצרכן משתנה, קו התקציב משתנה. נראה תזוזות מקבילות בקו התקציב, כלפי מעלה כאשר ההכנסה עולה, וכלפי מטה, כאשר ההכנסה פוחתת, משום ש- I/P_y משתנה. כאשר מחיר אחד המוצרים משתנה, קו התקציב משנה את שיפועו (P_x/P_y משתנה). אם מחיר Y פוחת, הכמות המירבית של Y תגדל בעוד הכמות המירבית של X נותרת ללא שינוי.

דוגמא, נניח שהכנסתו של הצרכן היא I=100 , ושני המוצרים מחיריהם 10 ש"ח ליחידה, מגבלת התקציב היא:

$$10q_x + 10q_y = 100$$

נוכל לכתוב את קו התקציב באופן הבא:

$$q_x + q_y = 10$$

הכמות המירבית שהצרכן יכול לרכוש מאחד המוצרים היא עשר יחידות, רק אם אינו צורך כלל מהמוצר האחר. אחרת, סכום הכמויות משני המוצרים 10. כאשר הכנסתו של הפרט עולה, למשל, ל- 120, והמחירים נותרים ללא שינוי, קו התקציב ישתנה ונמצא $q_x + q_y = 12$. אלטרנטיבית, אם מחיר X יורד ל- 5 , קו התקציב יהיה $q_x + 2q_y = 20$.

2.2 טעם הצרכן – פונקצית התועלת ומפת האדישות

כדי לתאר את טעמו של הצרכן, הכלכלנים מדברים על הנאה, תועלת, סיפוק. המוצרים (הטובין) בהם הצרכן בוחר מוסיפים לו תועלת. בעוד במאה ה- 19 קוו הכלכלנים שהצרכן יכול לתרגם את הנאתו לערכים מספריים, ולהעריך כמה יחידות תועלת נוספות עם שינוי סל המוצרים והוספת חולצה אחת או טיול אחד לפארק. היום ברור שדי לנו אם הצרכן יודע לדרג סלי מוצרים.

בעולם בו שני מוצרים בלבד, נעמיד בפני הצרכן סלים עם כמויות שונות של מוצרים. אם נתייחס לשני סלים בלבד A,B.

יתכנו שלושה מצבים:

סל A עדיף על סל B;

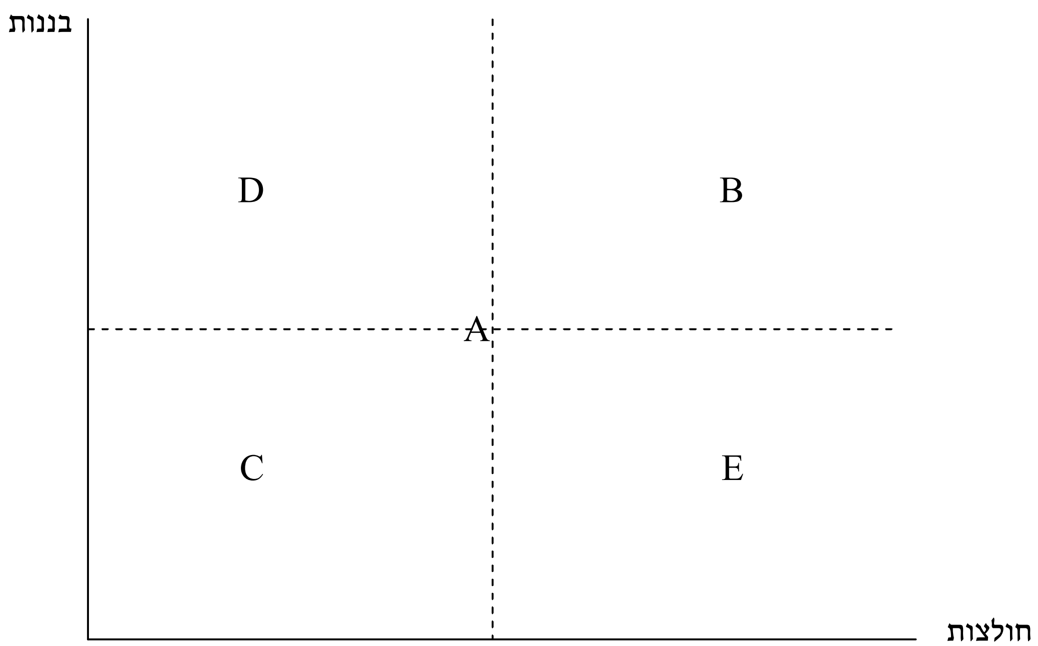
סל B עדיף על סל A;

הצרכן אדיש בין סלים A, B.

תכונה זו של העדפות הצרכנים עקבית עם ההנחה שפונקצית העדפה היא שלמה(complete) המושג הצרכן "אדיש בין הסלים", פירושו ששני הסלים נותנים לצרכן הנאה שווה. אין במושג התועלת התייחסות האם הצרכן קונה בפועל את הסלים; משום שגם אם נעדיף מכונית רולס-רויס, כל עוד אין לנו תקציב מספיק, לא נרכוש רולס-רויס.

הנחה שנייה לגבי פונקצית התועלת, היא שהתועלת היא טרנזיטיבית. אם סל A עדיף על סל B, ואם סל B עדיף על סל C, הרי סל A עדיף על סל C. לדוגמא, אם אני מעדיף תפוח על תפוז, ואם תפוז עדיף על בננה, לפי הנחת הטרנזיטיביות לא יתכן שהצרכן מעדיף בננה על תפוח. פונקצית התועלת של הצרכן צריכה להראות שתפוח עדיף על בננה, אחרת אינו עיקבי בהעדפותיו.

הנחה שלישית היא שהדיון מתייחס רק לטובין, המוסיפים לתועלתו של הפרט.

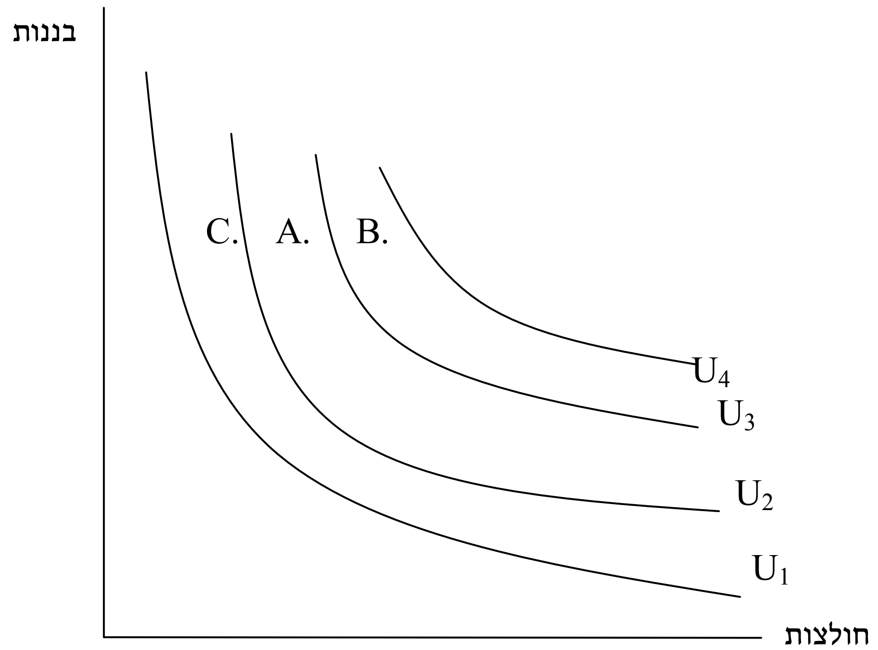


תרשים 2.2: השוואה בין סלי מוצרים

בעזרת שלש ההנחות נוכל לתאר את העדפותיו של הפרט על ידי מפה של עקומות אדישות. נתבונן בתרשים 2.2 . בתרשים מסומנות חמש נקודות – A, B, C, D, E. לאור הנחה ג' ברור שסל B עדיף על סל A, משום שבסל B יותר חולצות ויותר בננות, טובין המוסיפים לתועלתו של הפרט. בהתאם לאותה הנחה, סל A עדיף על סל C. אולם איך מתייחס סל A לסלים D, E ?

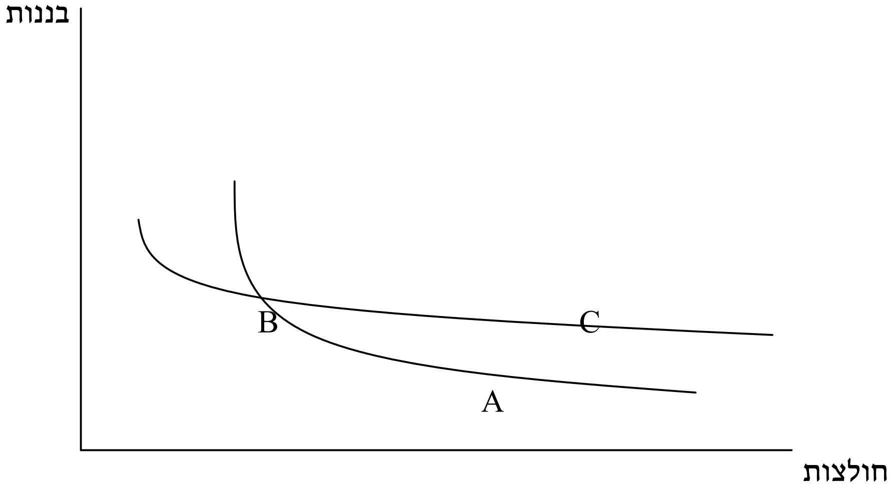
בסל D יותר בננות מאשר בסל A, אך פחות חולצות. האם ברור אם סל D עדיף על סל A, נחות לו, או שהצרכן אדיש בין הסלים.

נצייר עקומת אדישות העוברת דרך נקודה A. *עקומת אדישות* היא עקומה המחברת סלים שהצרכן אדיש ביניהם, וכולם נותנים לצרכן אותה רמת תועלת. נוכל באופן דומה לבחור כל סל אחר במישור, ולהעביר דרכו עקומת אדישות. עקומות האדישות השונות מרכיבות את *מפת האדישות*, ראה תרשים 2.3. רמות התועלת מראות את סדר העדפה, אך אינן אומרות בכמה סל A עדיף על סל C או על כל סל אחר.



תרשים 2.3: מפת אדישות המתארת העדפותיו של צרכן מסויים

האם העקומות השונות במפת האדישות חותכות זו את זו? נוכיח שהעקומות אינן חותכות בדרך השלילה. בתרשים 2.4 שתי עקומות אדישות החותכות זו את זו. לפי בנייה, ברור שסל C עדיף על סל A. אך, היות שסלים A, B נמצאים על פני אותה עקומת אדישות, נסיק שהצרכן אדיש ביניהם. בדומה, הצרכן גם אדיש בין סלים B, C הנמצאים אף הם על פני אותה עקומת אדישות. מתוך הנחת הטרנזיטיביות נסיק, שהצרכן אדיש בין הסלים A, B, C, אך מסקנה זו סותרת לממצא הראשון שסל C עדיף על סל A. לפיכך, נסיק שעקומות אדישות אינן חותכות זו את זו.



תרשים 2.4: עקומות אדישות החותכות זו את זו

2.3 <u>חישוב הכמות האופטימלית ממוצר X</u>

הצרכן מחפש סל מוצרים, שייתן לו מכסימום תועלת, כאשר מגבלת התקציב נתונה. נוכל לכתוב את בעייתו של הצרכן באופן מתמטי:

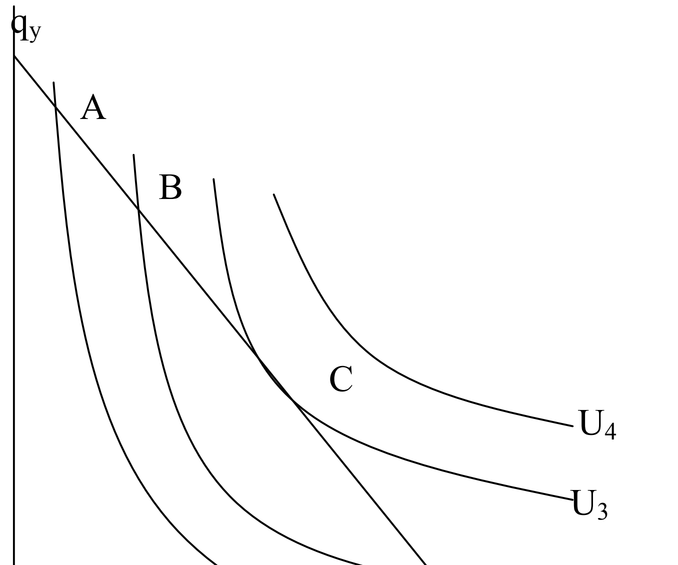
$$Max\ U\ (X,Y)$$
$$s.t\ \ P_x q_x + P_y q_y \le I$$

כאשר *U (X,Y)* - פונקצית התועלת משני המוצרים *X, Y*;

- Max U (X,Y) מציין שהצרכן מחפש ערך מכסימלי לפונקצית התועלת;

$s.t\ \ P_x q_x + P_y q_y \le I$-מגבלת התקציב;

s.t (subject to) – בכפוף ל -;



תרשים 2.5 : בחירת סל אופטימלי על פני קו תקציב

בתרשים 2.5 מוצג קו תקציב המתאר את מגבלת ההכנסה, וכמו כן מוצגת מפת עקומות האדישות, המתארת את טעמו של הצרכן. נוכל לראות, שנקודות שונות על פני קו התקציב נמצאות על פני עקומות אדישות עם רמות תועלת שונות. הצרכן מעונין בתועלת מירבית, לפיכך מבחינתו מעבר מסל A לסל B הוא רצוי, כי התועלת עולה. סל A נמצא על פני עקומת אדישות שרמת התועלת בה U_1, ואילו סל B נמצא על פני עקומת אדישות עם תועלת U_2 כאשר $U_2 \rangle U_1$.

אם הצרכן יעבור מסל B לסל C , הוא שוב יגדיל את התועלת שלו. אך אם יעבור מסל C לסל D או לסל E התועלת תפחת. נסיק שמבין הסלים האפשריים, A, B, C, D, E הסל C נותן לצרכן את התועלת המירבית. מה מאפיין סל זה? הוא נמצא בנקודה בה קיימת השקה בין עקומת האדישות לבין קו התקציב. בסל C הצרכן נמצא על עקומת האדישות U_3. הוא היה רוצה להגיע לרמת תועלת U_4 , אך לעקומה זו אין נקודה משותפת עם קו התקציב, כלומר הצרכן בשל מגבלת התקציב לא יוכל להגיע לרמת תועלת זו.

<u>דוגמא 2.1</u>

נניח שניתן לתאר את פונקצית התועלת ע"י הפונקצייה: $U(X,Y) = q_x q_y$

כמו כן נניח, $P_x = 10, P_y = 10, I = 100$ כפי שראינו קו התקציב במקרה זה הוא: $q_x + q_y = 10$

נבחן סלים שונים המקיימים את מגבלת התקציב (בדוגמא נתייחס לערכים בדידים בלבד), ונראה מה רמת התועלת המתאימה לכל סל.

טבלה 2.1: סלים ורמות תועלת

סל	כמות X	כמות Y	רמת תועלת
A	10	0	0
B	9	1	9
C	8	2	16
D	7	3	21
E	6	4	24
F	5	5	25
G	4	6	24

שבעה הסלים בטבלה מיצגים סלים בדידים אפשריים במגבלת התקציב, ובשל הסימטריה קל להשלים את הטבלה. נראה שבמעבר מ- A ל- B וכו' הצרכן מעביר בתקציבו כסף מרכישת X

לרכישת Y. נראה שהתועלת הולכת ועולה עד שנגיע לסל F, בו רמת התועלת מירבית – 25. המשך הפניית התקציב למוצר X תגרום להפחתת התועלת. לפיכך נסיק שסל F הוא הסל האופטימלי.

נפתור את בעיית הצרכן באופן מתמטי, בעזרת שיטת ההצבה.
בעייתו של הצרכן היא

$$Max\ U(X,Y)$$

$$s.t\ q_x + q_y = 10$$

מתוך מגבלת התקציב נחשב את q_y,

$$q_y = 10 - q_x$$

נציב את q_y בפונקצית התועלת, ועל ידי כך נקבל את התועלת כתלויה במשתנה אחד – כמות q_x.

$$U(X,Y) = q_x q_y = q_x(10 - q_x) = 10q_x - q_x^2$$

כדי לחשב את כמות q_x הנותנת תועלת מירבית, נגזור את פונקצית התועלת ונשווה את הנגזרת הראשונה לאפס.

$$\frac{dU}{dq_x} = 10 - 2q_x = 0 \Rightarrow q_x = 5$$

כדי לוודא שהכמות שחישבנו נותנת תועלת מירבית, נחשב נגזרת שנייה ונבדוק אם היא שלילית.

$$\frac{d^2u}{dq_x^2} = -2 \langle 0$$

$$q_x = 5, q_y = 5$$

הסל הנותן תועלת מירבית הוא:
והתועלת של הצרכן:

$$U = 25$$

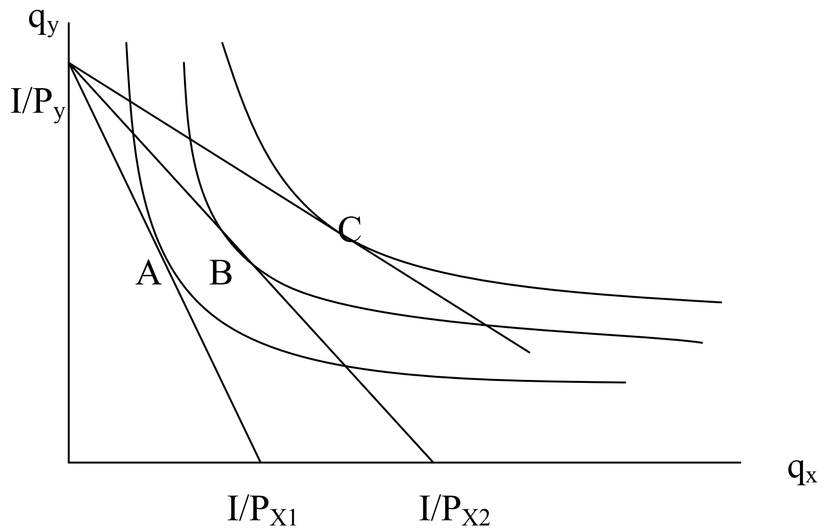
את סל זה "ניחשנו" מתוך הטבלה, והחישוב המתמטי הראה שבמגבלת תקציב של 100, תועלת שגובהה 25 היא התועלת המירבית אותה נקבל.

2.4 גזירת עקומת הביקוש למוצר X

אם נשנה את מחיר מוצר X, ונשמור את מחיר מוצר Y (P_y), את ההכנסה (I) והטעם (מפת עקומות האדישות) ללא שינוי, נוכל למצוא את התלות בין הכמויות המבוקשות ממוצר X (q_x) לבין מחיר מוצר X (P_x).

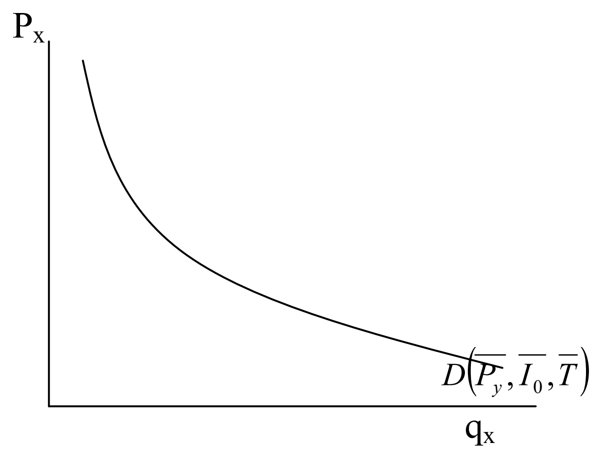
שינוי מחיר המוצר X פירושו שינוי בקו התקציב המתאר את אילוץ ההכנסה של הפרט. נקודות ההשקה, המוצגות בתרשים 2.6, מתארות את הסלים הנותנים תועלת מכסימלית לצרכן, ומראות שעם ירידת המחיר, הצרכן מגדיל את התצרוכת ממוצר X.

נשים לב שבתרשים 2.6 מתקיים לגבי המחירים: $P_{x1} > P_{x2} > ....P_{xn}$



תרשים 2.6: בחירת סלים אופטמליים עם שינוי המחיר

האינפורמציה המתקבלת מסלי המוצרים הנבחרים תועבר למישור בו הצירים הם (P_x, q_x), וחיבור הנקודות יתווה עקומת ביקוש D. העקומה נבנתה כאשר הפרמטרים שלה הם מחיר מוצרים אחרים, ההכנסה ופונקצית הטעם, כפי שדנו בפרק 1 , וכפי שהדגשנו בגזירת העקומה מתוך פונקצית התועלת ומגבלת התקציב בפרק זה.



תרשים 2.7: עקומת הביקוש למוצר X

2.4.1 <u>דוגמא: חישוב עקומת הביקוש בפונקצית Cobb-Douglas</u>

נניח שפונקצית התועלת היא: $U(X,Y) = q_x^{\alpha} q_y^{\beta}$, פונקצית תועלת זו מכונה פונקצית Cobb-Douglas וכלכלנים מרבים להדגים בעזרתה.

מגבלת התקציב: $P_x q_x + P_y q_y = I$

מובן, שקיימים הרבה סלים, המקיימים את מגבלת התקציב, אך מהו הסל האופטימלי?

נחשב את סל המוצרים q_x, q_y המספק לצרכן תועלת מירבית תוך התחשבות במגבלת התקציב.

מתוך מגבלת התקציב נציב את q_y בפונקצית התועלת. $U(X,Y) = q_x{}^{\alpha}\left[\frac{I}{P_y} - \frac{P_x}{P_y}q_x\right]^{\beta}$

כמות q_x שתתן תועלת מכסימלית תמצא ע"י גזירת פונקצית התועלת והשוואתה של הנגזרת לאפס.

נסמן $\left[\frac{I}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y}q_x\right] = [\ ]$

$$\frac{dU(X,Y)}{dq_x} = \alpha\, q_x{}^{\alpha-1}[\ ]^{\beta} + \beta[\ ]^{\beta-1}(-\frac{P_x}{P_y})q_x{}^{\alpha} = 0$$

נחשב את הנגזרת ונשווה אותה לאפס.

מתוך הגזירה קבלנו: $\alpha\, q_x{}^{\alpha-1}[\ ]^{\beta} = \beta[\ ]^{\beta-1} q_x{}^{\alpha}(\frac{p_x}{p_y})$

עם פתיחת הסוגריים המרובעים, וסידור האברים נקבל: $p_y\left[\frac{I}{P_y} - \frac{p_x}{P_y}q_x\right] = \frac{\beta}{\alpha}q_x P_x$

נציב במגבלת התקציב ונקבל

$$P_x q_x\left[1 + \frac{\beta}{\alpha}\right] = I$$

פונקצית הביקוש למוצר X היא:

$$q_x = \frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)P_x}$$

ובהתאמה, פונקצית הביקוש למוצר Y

$$q_y = \frac{\beta I}{(\alpha+\beta)P_y}$$

ניתן לראות שבפונקצית תועלת זו, הביקוש למוצר תלוי במחיר המוצר עצמו וברמת ההכנסה, אך בלתי תלוי במחיר מוצרים אחרים. כלומר, אם נצייר את נקודות ההשקה במישור q_x, q_y כאשר נשנה (נפחית) את מחיר X כמות X תשתנה (תגדל), אך כמות Y נותרת ללא שינוי. אם נעביר את האינפורמציה למישור מחיר-כמות, ניווכח שעקומת הביקוש ל-X, כפי שצפינו יורדת משמאל לימין, ומתאימה לתצפיות על התנהגות צרכנים. היות ש- α, β, I הם קבועים, הצרכן מוציא אחוז קבוע מהכנסתו על כל מוצר (במקרה זה נדון בסעיף 2.6.5 בדיון בעקומת ביקוש עם גמישות יחידתית). עקומת הביקוש ל-Y לא תשתנה עם שינוי מחיר X, ונסיק שהמוצרים הם בלתי תלויים. כמו כן נסיק ששני המוצרים הם מוצרים נורמליים: עם עליית ההכנסה, כאשר המחירים

$\frac{dq_x}{dI} > 0$, $\frac{dq_y}{dI} > 0$ נתונים, התצרוכת עולה.

מובן, שאם רמת ההכנסה ומחיר המוצרים נתונים, נוכל לחשב את הכמות המבוקשת ע"י הצבה בפונקציה שנתקבלה.

בדוגמא 2.1 התקיים $I=100, \alpha = \beta = 1$. פונקצית הבקוש ל-X היא $q_x = \frac{100}{2P_x}$ וכאשר

$P_x = 10$ מתקבל שהכמות המבוקשת היא $q_x = 5$, כפי שקבלנו בדוגמא.

2.5 גמישות הביקוש

כדי לאפיין עקומות ביקוש ניתן לבחון את שיפוע העקומה בנקודות שונות לאורך העקומה. החסרון העיקרי של מאפיין זה – השיפוע – הוא הרגישות שלו ליחידות המדידה.

אם הכמות נמדדת בגרמים, ק"ג או טון, והמחיר בש"ח, באגורות או באלפי ש"ח, נקבל ערכים שונים לשיפוע, למרות שהשיפוע נותר ללא שינוי. כדי להתגבר על חסרון זה נגדיר את גמישות הביקוש למחיר. זהו מספר טהור, ויתרונו שהוא מלמד אותנו, כפי שנראה בהמשך, על הפדיון.

הגדרה: גמישות הביקוש לפי מחיר

$$E=\left|\frac{\text{% השינוי בכמות}}{\text{% השינוי במחיר}}\right| = \left|\frac{dq_x / q_x}{dP_x / P_x}\right|$$

הגמישות מוגדרת כערך המוחלט של היחס בין אחוזי השינוי בכמות לאחוזי השינוי במחיר.

נזכור שהיחס בין שינוי במחיר לשינוי בכמות הוא תמיד שלילי(כאשר המחיר פוחת, הכמות עולה, ולהיפך), והערך המוחלט הופך יחס זה לחיובי.

הגמישות מוגדרת בנקודה נתונה על פני עקומת הביקוש, כאשר נבחן השפעת שינוי אינפיניטיסימלי במחיר המוצר. בפועל, לעיתים מזומנות השינוי במחיר אינו זניח ונעדיף להשתמש בנוסחת הגמישות הקשתית. ראה סעיף 2.5.4.

התבוננות בתגובה של הצרכן לשינויי מחיר, מראה שהפחתה של אחוז אחד במחיר יכולה להביא לעלייה באחוז, יותר מאחוז או פחות מאחוז, בכמות. השינוי בכמות כתוצאה משינוי במחיר אינו קבוע במוצרים שונים, וכפי שנראה גם אינו קבוע באותו מוצר, בתגובה למחירים שונים. אנו מאפיינים את היחס בין השינוי בכמות לשינוי במחיר, בהתאם לערכו המספרי.

כאשר חברת תעופה מפחיתה את המחיר ב- 10% וכתוצאה מכך חל גידול בכמות ב- 20%, ערכה של הגמישות הוא 2 (בערך מוחלט), אולם אם הגידול בכמות הוא ב- 5%, ערכה של הגמישות 0.5 (שוב בערך מוחלט). נמצא גם ערכים אחרים לגמישות. נוכל לאפיין את ערך הגמישות בתחומים הבאים:

$E=0$ התחום קשיח לחלוטין בעקומת הביקוש.

$0<E<1$ התחום קשיח בעקומת הביקוש.

$E=1$ תחום גמישות יחידתית.

$1 < E < \infty$ התחום הגמיש בעקומת הביקוש.

$E \to \infty$ התחום הגמיש לחלוטין בעקומת הביקוש.

2.5.1 במה תלויה גמישות הביקוש

גמישות הביקוש תלויה במידת הנחיצות של המוצר, ובהוצאה עליו מכלל ההכנסה. נראה, שלמוצרים שהם נחוצים לנו ואין להם תחליפים, עקומת ביקוש קשיחה יותר. דוגמא למקרה קיצוני הוא אינסולין או תרופות אחרות ללא תחליף.

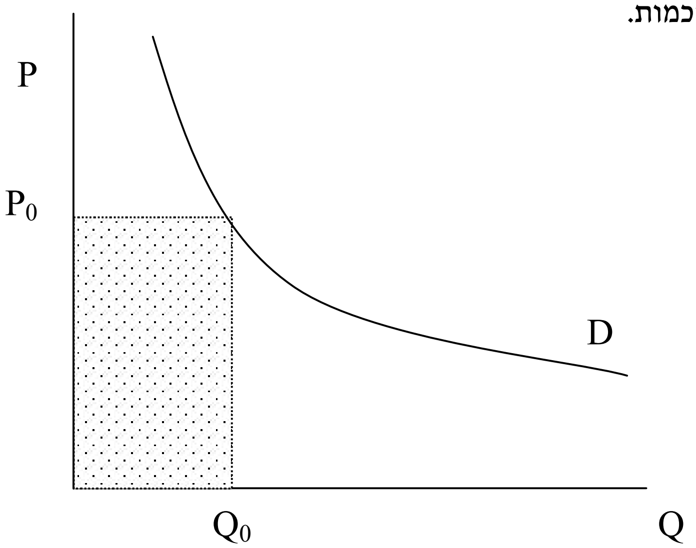
ככל שלמוצר תחליפים קרובים יותר, עקומת הביקוש גמישה יותר. אם נסתכל על הביקוש לסבון או לשמפו, הרי קיומם של תחליפים רבים גורם לכך שהביקוש למותג ספציפי הוא גמיש יחסית.

ככל שההוצאה על מוצר קטנה יותר מכלל ההכנסה, הצרכן רגיש פחות לשינויים במחיר המוצר, והעקומה קשיחה יותר. עקומת הביקוש לטיולים לחו"ל גמישה פחות מעקומת הביקוש לטיולים בפרק הכרמל, למרות ששניהם עונים לצורך בטיול בטבע.

2.5.2 הקשר בין גמישות הביקוש והפדיון השולי

נראה, שלאורך עקומת הביקוש, ההוצאה של הצרכן על המוצר, שהיא הפדיון של היצרן, אינה קבועה, אלא משתנה. יתכן, שעם הירידה במחיר ועליית הכמות, הפדיון גדל, קטן, או נותר ללא שינוי.

נגדיר פדיון Total Revenue, יסומן TR, כמכפלת המחיר בכמות, ונמדוד אותו ע"י מלבן שגובהו המחיר ורוחבו הכמות.



תרשים 2.8: מדידת הפדיון בעזרת עקומת ביקוש

עם הירידה במחיר, הכמות הנרכשת עולה ויש לבחון את השינוי בפדיון ע"י השוואת המלבנים המודדים את סה"כ הפדיון בתרשים 2.9.

במצב ההתחלתי, הפדיון הוא $TR_0=P_0Q_0=I+II$

לאחר ירידת המחיר, הפדיון הוא $TR_1=P_1Q_1= II+III$

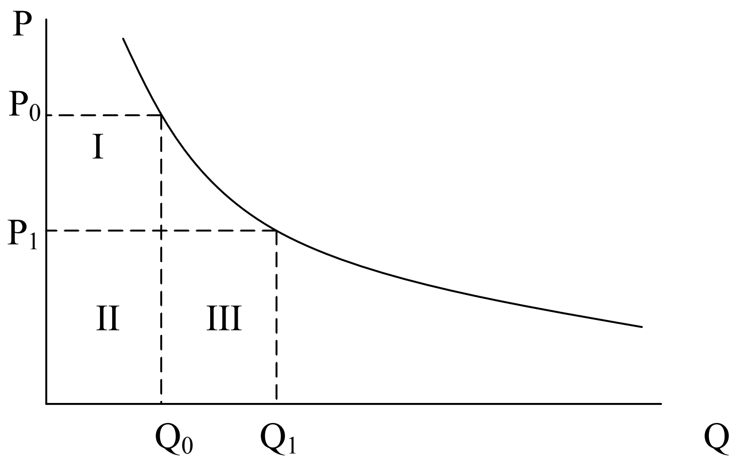
ההבדל בין המצבים מבחינת היצרנים: אם מכרנו יחידה נוספת, הפדיון גדל במחיר היחידה הנמכרת, שטח III. אולם כדי למכור יחידה נוספת נאלצנו להפחית את המחיר ולמכור את כל היחידות שמכרנו עד עתה (Q_0) במחיר נמוך יותר. "ההפסד" בשל ירידת המחיר הוא השטח I.

השינוי בפדיון יקבע לפי הפרש השטחים.

$\Delta TR = TR_1 - TR_0 = (II+III)-(I+II) = II-I$

הגדרה: פדיון שולי, Marginal Revenue, יסומן MR, השינוי בפדיון עם שינוי הכמות המבוקשת.

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$



תרשים 2.9: השוואת הפדיון עם שינוי המחיר, ע"י שטחים בעקומת הביקוש

2.5.3 <u>הקשר בין הפדיון השולי והגמישות: פיתוח מתמטי.</u>

נבחן את השינוי בפדיון באופן מתמטי, ונראה בסעיף זה, שהוא תלוי בגמישות הביקוש.
אם נסתכל בתרשים 2.9 נוכל לכתוב:

$$P_1 = P_0 - \Delta P$$

$$Q_1 = Q_0 + \Delta Q$$

הפדיון הראשוני הוא:

$$TR_0 = P_0 Q_0$$

ואילו הפדיון עם שינוי המחיר:

$$TR_1 = (P_0 - \Delta P)(Q_0 + \Delta Q)$$

השינוי בפדיון הוא:

$$\Delta TR = (P_0 - \Delta P)(Q_0 + \Delta Q) - P_0 Q_0 = (P_0 Q_0 + P_0 \Delta Q - Q_0 \Delta P - \Delta P \Delta Q) - P_0 Q_0$$

נניח שהמכפלה של השינויים שואפת לאפס

$$\Delta P * \Delta Q \to 0$$

ולכן נקבל

$$\Delta TR = P_0 \Delta Q - Q_0 \Delta P = P_0 \Delta Q \left[1 - \frac{\Delta P Q_0}{P_0 \Delta Q} \right]$$

נוכל לכתוב את השבר גם באופן הבא

$$\frac{\Delta P Q_0}{P_0 \Delta Q} = \frac{\Delta P / P_0}{\Delta Q / Q_0} = \frac{1}{E}$$

נסיק מכך שניתן לכתוב את השינוי בפדיון באופן הבא:

$$\frac{\Delta TR}{\Delta Q} = P_0\left[1 - \frac{1}{|E|}\right]$$

כלומר, הפדיון השולי (השינוי בפדיון כתוצאה משינוי בכמות, למשל ביחידה אחת) תלוי במחיר המוצר ובגמישות הביקוש.

הפדיון השולי יחושב בסעיף 5.7 בעזרת נגזרות.

2.5.4 <u>גמישות קשתית</u>

כאשר השינוי במחיר אינו זניח, ערך הגמישות תלוי בנקודת ההתחלה. דוגמא:

הנח שקומבינציית המחיר והכמות במצב הראשוני הינה:

$P_0=20$ $Q_0=20$

וקומבינציית המחיר והכמות במצב הסופי הינה:

$P_1=25$ $Q_1=15$

אם נקודת המוצא היא המצב הראשוני (P_0,Q_0) הרי הגמישות היא: $\left|\frac{-5}{20} \Big/ \frac{5}{20}\right| = 1$

אולם אם נקודת המוצא היא המצב הסופי (P_1, Q_1) הרי הגמישות היא: $\left|\frac{5/15}{-5/25}\right| = 1.6$

כדי להימנע מערכי הגמישות השונים נגדיר *גמישות קשתית*, Arc Elasticity:

אחוז השינוי בכמות מחולק באחוז השינוי במחיר, כאשר חישוב השינוי גם לכמות וגם למחיר נעשה עבור נקודת אמצע הקשת. החישוב נעשה כאשר השינוי במחיר ובכמות הם גדולים יחסית.

כאשר A, B הן נקודות על עקומת הביקוש-גבולות הקשת, תחושב הגמישות הקשתית ע"י:

$$E_{X,P_X} = \frac{Q_A - Q_B}{\frac{Q_A + Q_B}{2}} \Bigg/ \frac{P_A - P_B}{\frac{P_A + P_B}{2}}$$

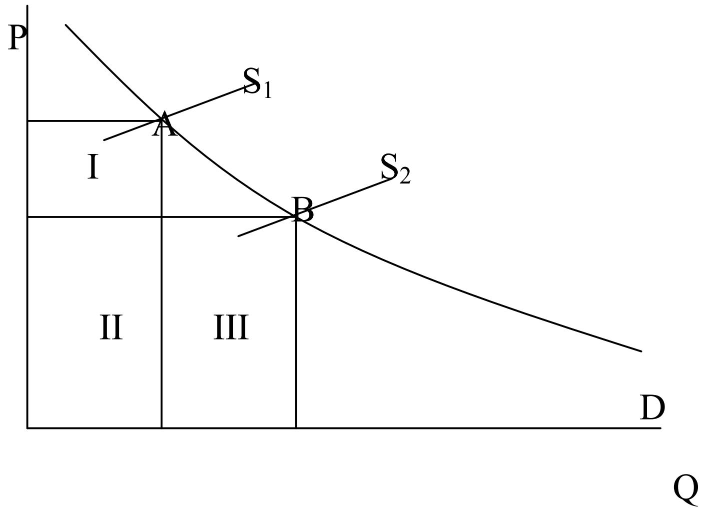
נחזור לדוגמא המספרית ונראה שאמנם הגדרת הגמישות הקשתית תיתן תוצאה לערך הגמישות שהיא בלתי תלויה בנקודת ההתחלה.

$$\left|\frac{5}{17.5} \Big/ \frac{5}{22.5}\right| = \left|\frac{22.5}{17.5}\right| = 1\frac{2}{7}$$

2.6 דיון בסוגים שונים של עקומות ביקוש, בגמישויות ובפדיון שולי

נראה שערכים של גמישות משמעם ערכים שונים של הפדיון השולי. נבחן השפעת שינוי בהיצע על סה"כ הפדיון בתחומים השונים של עקומת הביקוש.

2.6.1 עקומת הביקוש בתחום הגמיש $1 < E < \infty$



תרשים 2.10: השינוי בפדיון בעקומת ביקוש גמישה

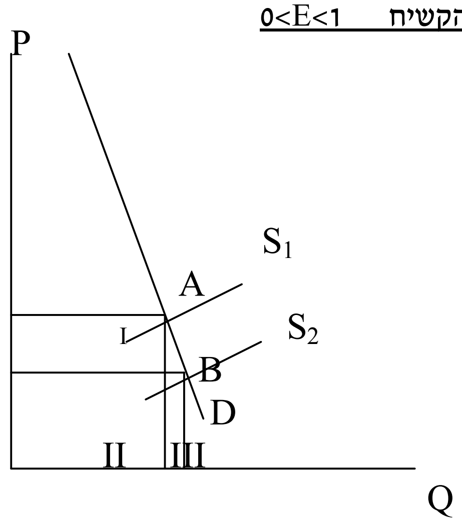
אם נסתכל בתרשים 2.10 נראה שעם העלייה בהיצע, נקודת שווי המשקל עוברת מ-A ל-B בהשוואת הנקודות נראה שאחוז השינוי בכמות גדול בהרבה מאחוז השינוי במחיר, ולכן E>1.

אם נבחן את השינוי בפדיון נראה ששטח III גדול בהרבה משטח I, ולכן נראה שהפדיון השולי חיובי.

אם נציב בנוסחת הפדיון השולי, גמישות המתאימה לתחום הגמיש בעקומת הביקוש (למשל גמישות השווה לארבע) נקבל

$$MR = P[1-1/4] = 0.75P \rangle 0$$

2.6.2 עקומת הביקוש בתחום הקשיח 0<E<1



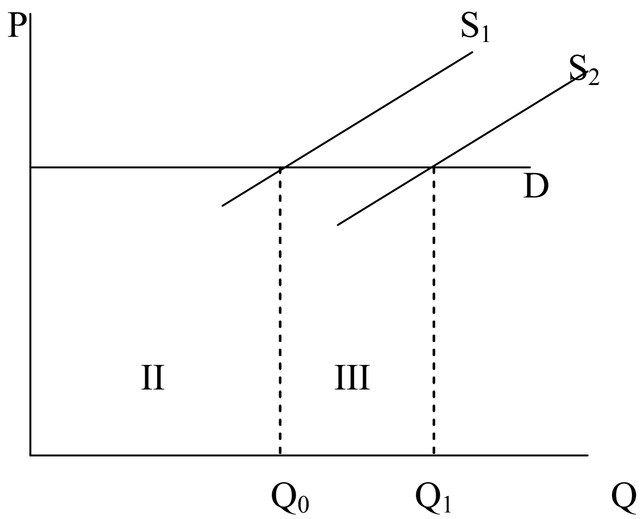
תרשים 2.11: השינוי בפדיון בעקומת ביקוש קשיחה

תרשים 2.11 מורה שהעלייה בהיצע גורמת לשינוי בנקודת שווי המשקל. בהשוואת הנקודות נראה שאחוז השינוי בכמות קטן בהרבה מאחוז השינוי במחיר, ומתקיים ש $E<1$, למשל, $E=0.75$.
השוואת השטחים מראה ששטח III קטן משטח I, והפדיון השולי הוא שלילי.

נציב בנוסחת הפדיון השולי גמישות המתאימה לתחום הקשיח בעקומת הביקוש, $E=\frac{1}{4}$. נקבל שאמנם הפדיון השולי שלילי:

$$MR = P\left[1-\frac{1}{1/4}\right] = -3P$$

2.6.3 __עקומת ביקוש גמישה לחלוטין__ $E \to \infty$



תרשים 2.12: השינוי בפדיון בעקומת ביקוש גמישה לחלוטין

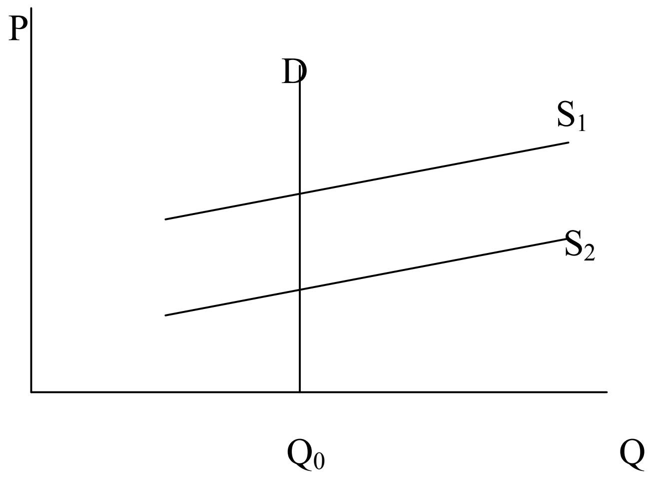
בעקומת ביקוש זו, הצרכן מוכן לקנות כל כמות במחיר נתון. יצרן המיצא תפוזים או פרחים לחו"ל רואה עקומת ביקוש מסוג זה. הצרכנים מוכנים לקנות ממנו 'כל כמות' במחיר נתון.
אם ההיצע גדל, נראה שכמות שיוויי משקל גדלה מבלי שמתלווה אליה ירידה במחיר המוצר.
קיים שינוי בכמות למרות שאין שינוי במחיר, ולכן $E \to \infty$.
במצב הראשוני סך הפדיון היה $TR_0=P_0Q_0$ ועם מכירת יחידה נוספת הפדיון הוא $TR_1=P_0(Q_0+1)$
הפדיון השולי, הנובע ממכירת יחידה נוספת הוא $MR=P_0$.

אם נציב בנוסחת הפדיון השולי את הגמישות המתאימה $E \to \infty$ נקבל $MR = P\left[1-\frac{1}{\infty}\right] = P$.

הפדיון השולי במקרה זה הוא המירבי; עם מכירת יחידה נוספת הפדיון גדל במחיר המוצר. מקרה זה שונה מהמקרים האחרים בהם מכירת יחידה נוספת (אם תתקיים) מחייבת הפחתה במחיר –

וכתוצאה מכך הפחתה בפדיון בשטח שסומן I.

2.6.4 עקומת ביקוש קשיחה לחלוטין, E=0



תרשים 2.13: השינוי בפדיון בעקומת ביקוש קשיחה לחלוטין

בעקומת ביקוש זו הצרכן מוכן לקנות כמות נתונה, אך אינו מוכן לקנות יותר. משווק אינסולין רואה בפניו עקומת ביקוש מסוג זה. הצרכנים מוכנים לשלם ממחיר אפסי עד מחיר גבוה מאד עבור אינסולין, ולא ישנו את הכמות המבוקשת. גמישות הביקוש במקרה זה, $E = 0$. גם שינוי בעשרות אחוזים במחיר לא יגרום לשינוי בכמות. למשל בתרשים 2.13 למרות שההיצע גדל והמחיר יורד, אין שינוי בכמות המבוקשת.

היות שהפדיון השולי מתייחס לשינוי בפדיון עם מכירת יחידה נוספת, הרי גם אם נפסיד את כל הפדיון לא נצליח למכור יחידה נוספת.

אם נציב בנוסחת הפדיון השולי את הגמישות המתאימה E=0 נקבל $-\infty$ $MR = P\left[1-\frac{1}{0}\right] \to -\infty$

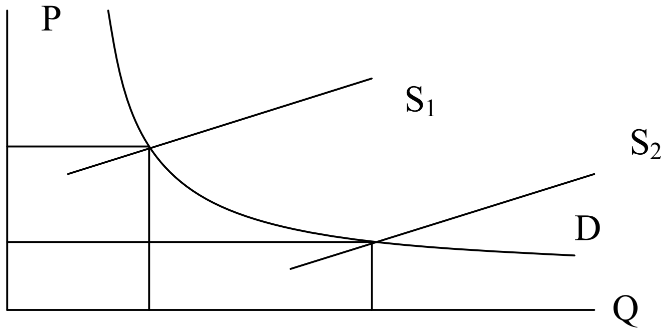
2.6.5 עקומת ביקוש עם גמישות יחידתית E=1

נתחיל במקרה זה בהצבה בנוסחת הפדיון השולי $MR = P\left[1-\frac{1}{1}\right] = 0$

הפדיון השולי שווה לאפס, שפירושו, שעם השינוי בהיצע ובנקודת שיווי משקל, סה"כ הפדיון נותר ללא שינוי.

מהגדרת הגמישות נובע, שבמקרה זה, אחוז השינוי בכמות שווה לאחוז השינוי במחיר.

נסמן את סה"כ הפדיון כ-A. ובמקרה זה מתקיים $P_0Q_0=P_1Q_1=A$ כלומר נוסחת עקומת הביקוש היא $P = \frac{A}{Q}$ (נוסחה המזכירה לנו את נוסחת ההפרבולה $Y = \frac{A}{X}$, ואמנם זו צורת עקומת הביקוש).



תרשים 2.14 : השינוי בפדיון בעקומת ביקוש עם גמישות יחידתית

נסיק שכאשר נוסחת העקומה היא $P=\frac{A}{Q}$ הגמישות שווה ל- 1, ע"י גזירת הפונקציה והצבה בנוסחת הגמישות נווכח שאמנם זהו ערך הגמישות.

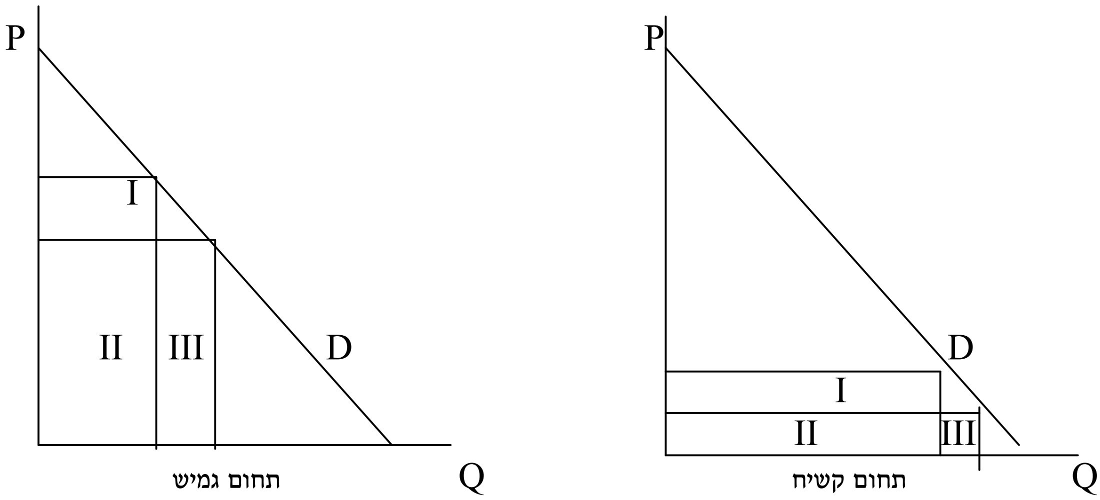
$$E=\left|\frac{dQ/Q}{dP/P}\right|=\left|\frac{P/Q}{\frac{dP}{dQ}}\right|=\left|\frac{\left(A/Q\right)/Q}{-\frac{A}{Q^2}}\right|=1$$

מוצר, שעקומת הביקוש שלו היא בעלת גמישות יחידתית, הוא למשל מוצר עליו הצרכן מוציא סכום קבוע או אחוז קבוע מהכנסתו. למשל, מדי חודש נקציב להליכה לקולנוע סכום נתון, ומספר הביקורים בקולנוע ישתנה עם שינוי מחיר הכרטיס; או נוציא על ביגוד 20% מכלל ההכנסה, שהוא סכום נתון.

2.7 השינויים בגמישות לאורך עקומת הביקוש – מקרה הביקוש הלינארי

הגמישות לפי הגדרתה היא תמיד נקודתית, ולא גמישות לאורך העקומה, ולכן מוטעה לומר "עקומת ביקוש גמישה/קשיחה", אלא יש לומר "עקומת ביקוש בתחום הגמיש/הקשיח". הדגשה לכך נוכל לחוות בעקומת ביקוש לינארית בה גמישות הביקוש משתנה לאורך העקומה, ונראה בה תחום גמיש ($E>1$), תחום קשיח ($0<E<1$) וכמות בה הגמישות שווה ל- 1.

נראה בתחילה באופן גרפי בתרשים 2.15, שאמנם לאורך עקומה לינארית הפדיון השולי בתחילה חיובי (בתחום בו ערכי הפדיון השולי חיוביים) אח"כ שלילי (בתחום בו ערכי הפדיון השולי שליליים), וביניהם אפס. אם נתבונן בתרשים 2.15 בחלק השמאלי, במחירים הגבוהים, מכירת יחידה נוספת מגדילה את הפדיון, כי ההפרש III-I הוא חיובי. לעומת זה, בחלק הימני, במחירים הנמוכים הפרש השטחים הוא שלילי.



תרשים 2.15: עקומת ביקוש לינארית עם תחום גמיש ותחום קשיח

נראה מתמטית שאמנם הפדיון השולי הופך מחיובי לשלילי לאורך עקומה לינארית.

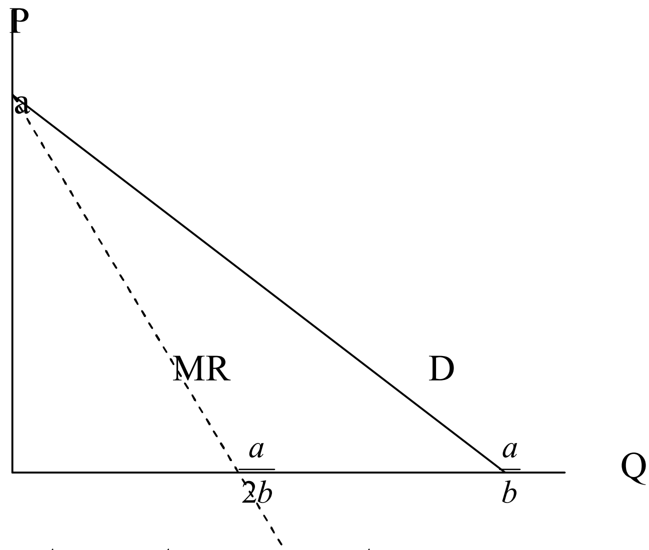
נוסחת עקומת ביקוש לינארית היא $P_x = a - bQ_X$

סה"כ הפדיון בכל נקודה ונקודה הוא $TR = P_X Q_X = aQ_X - bQ^2{}_X$

את הפדיון השולי נחשב ע"י גזירת סה"כ הפדיון: $MR = \frac{dTR}{dQ} = a - 2bQ_X$

אם נצייר את עקומת הביקוש ועקומת הפדיון השולי על פני אותה מערכת צירים, נראה שהפדיון השולי הוא התיכון לעקומת הביקוש; החיתוך עם הציר האנכי זהה בשתי העקומות (a), ואילו החיתוך עם הציר האופקי הוא חצי בעקומת הפדיון השולי (כאשר P=0 בעקומת הביקוש $Q = \frac{a}{b}$,

ואילו כאשר MR=0 בעקומת הפדיון השולי $Q = \frac{a}{2b}$).



תרשים 2.16: עקומת ביקוש לינארית והפדיון השולי המתאים לה

מסקנות

בפונקצית ביקוש לינארית, הפדיון השולי הוא קו ישר – החציון.

$0 < Q < a/2b$ הפדיון השולי חיובי, ופונקצית הביקוש בתחום הגמיש;

$Q = a/2b$ הפדיון השולי אפס, והביקוש בכמות בה קיימת גמישות יחידתית;

$a/2b < Q < a/b$ הפדיון השולי שלילי, ופונקצית הביקוש בתחום הקשיח.

כלומר, עקומה לינארית מדגישה שאמנם הגמישות משתנה מנקודה לנקודה, ובהתאם, משתנה גם הפדיון השולי, למרות השיפוע הקבוע לעקומה.

איך נוכל להסביר את השינויים בגמישות הביקוש?

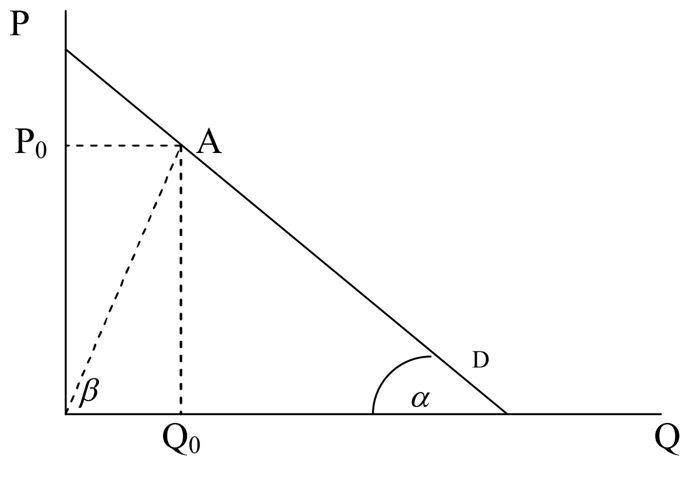
נסתכל על נוסחת הגמישות הנקודתית.

$$E = \left| \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{P}} \right| = \left| \frac{\frac{P}{Q}}{\frac{dP}{dQ}} \right|$$

שיפוע העקומה הוא קבוע, $\frac{dP}{dQ}$, אולם היחס $\frac{P}{Q}$ משתנה מנקודה לנקודה.

נוכל למדוד גרפית את $\frac{dP}{dQ}$ ע"י שיפוע עקומת הביקוש, ע"י סימון הזווית המתאימה ב- α.

במקרה זה מתקיים: $dP/dQ = -b = tg\alpha$.



תרשים 2.17: מדידת גמישות בעקומת ביקוש לינארית בעזרת זוויות

את היחס P/Q נוכל למדוד ע"י חיבור קרן אל הראשית, למשל, בנקודה A ע"י חיבור הקרן נקבל משולש ישר זווית. האנך מודד את המחיר בנקודה A, P_0, והמרחק האופקי מודד את הכמות בנקודה A, Q_0. היחס P_0/Q_0 יכול להימדד ע"י $tg\beta$.

גמישות הביקוש תמדד ע"י היחס בין הטנגנסים: $E = \left|\frac{tg\beta}{tg\alpha}\right|$

היות שפונקצית טנגנס היא מונוטונית, וכידוע, ככל שהזווית גדולה יותר ערך הטנגנס גדול יותר, לפיכך:

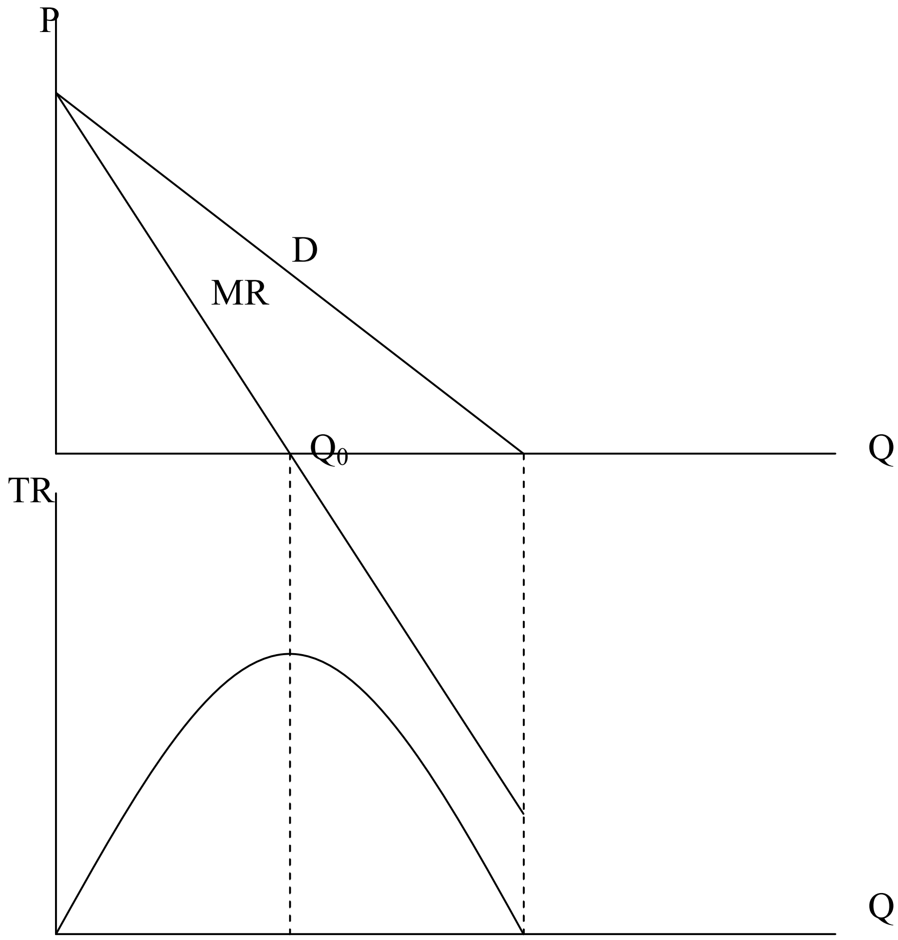
$\beta > \alpha \Rightarrow tg\beta > tg\alpha \Rightarrow E > 1$

$\beta = \alpha \Rightarrow tg\beta = tg\alpha \Rightarrow E = 1$

$\beta < \alpha \Rightarrow tg\beta < tg\alpha \Rightarrow E < 1$

מתי מתקיים $\beta = \alpha$? כאשר חיבור הנקודה על עקומת הביקוש אל הראשית נותן משולש שווה שוקיים בו זוויות הבסיס שוות, $\alpha = \beta$.

מה נוכל להסיק לגבי השתנות הפדיון לאורך עקומת ביקוש לינארית. כל עוד הפדיון השולי חיובי, מכירת יחידה נוספת מעלה את סה"כ הפדיון. אולם כאשר הפדיון השולי שלילי, המצב הפוך. נוכל לראות זאת גרפית תוך התייחסות לנוסחה: $TR = \int MRdQ$.



תרשים 2.18: חישוב סה"כ הפדיון בעזרת הפדיון השולי

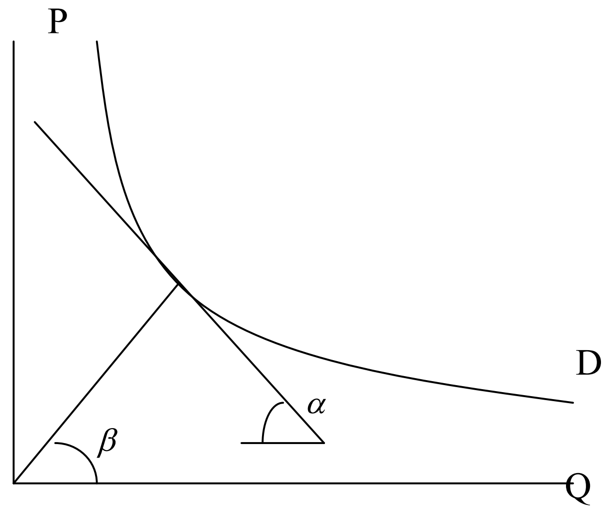
במכירת אפס יחידות סה"כ הפדיון הוא אפס.
עם מכירת היחידה הראשונה, הפדיון שלנו גדל בשטח מתחת לעקומת הפדיון השולי. הפדיון הולך וגדל עד שנמכור X יחידות. נוכל לראות שהיחידה ה X+1 מובילה לפדיון שולי שלילי, לפיכך מנקודה זו ואילך סה"כ הפדיון הולך ופוחת.
הפדיון חוזר להיות אפס, כשהמחיר ליחידה הוא אפס.

2.8 שינויים בגמישות הביקוש לאורך עקומת הביקוש – מקרה כללי

בכל נקודה ונקודה על פני עקומת הביקוש עלינו לחשב את גמישות הביקוש כדי שנוכל להסיק האם הפדיון השולי הוא חיובי או שלילי. לחישוב גמישות הביקוש נשתמש בנוסחת הגמישות המורה:

$$E = \left| \frac{P/Q}{dP/dQ} \right|$$

המונה יכול להמדד ע"י חיבור קרן אל הראשית וחישוב טנגנס הזווית α. המכנה יכול להמדד ע"י חישוב קרן המשיק בנקודה, זווית β. היחס בין הטנגנסים ובין הזוויות הוא שיורה לנו האם הגמישות גדולה מ- 1 והפדיון השולי חיובי, או שהגמישות קטנה מ- 1 (אך חיובית) והפדיון השולי שלילי.



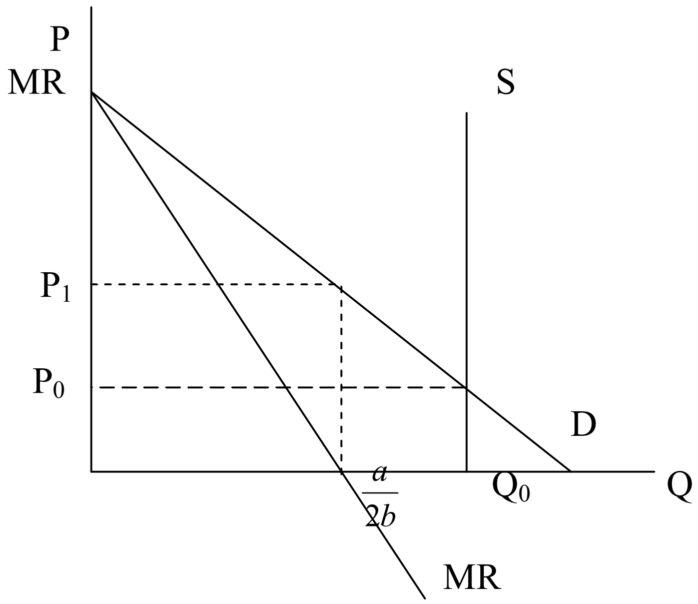
תרשים 2.19: הצגת גמישות הביקוש בעקומת ביקוש כללית בעזרת זויות

2.9 יישום לידע על פדיון שולי

נחשוב על עיירה קטנה ובה חנות אחת בלבד (הסבר להתייחסות זו תובהר בפרקים 5, 7). בעל החנות, משה, מכיר את תושבי העיירה ויודע מה עקומת הביקוש שלהם לכל מוצר. אתמול רכש משה מלאי גדול של תות שדה בסכום נתון, והוא מעוניין למכור את התות ברווח מכסימלי. היות שהרכישה נעשתה כבר, מכסימום רווח יושג אם הפדיון יהיה מכסימלי. משה יודע שעליו למכור את כל התותים היום כי אין לו אמצעי אחסון מתאימים. נניח שעקומת הביקוש היא ידועה ולינארית.

עקומת ההיצע צריכה לתאר את מלאי התות; העקומה תתלכד עם הציר האופקי עד לכמות Q_0, וממנו ואילך תהיה קשיחה לחלוטין ברמת Q_0. עקומה זו מכונה *עקומת היצע קשיחה לחלוטין*, ובה מוצעת כמות קבועה מהמוצר Q_0. עקומה זו שונה *מעקומת היצע גמישה לחלוטין*, בה היצרן מציע כל כמות במחיר P_0.

אם נשווה את עקומת הביקוש לעקומת ההיצע נווכח שמשה צריך למכור את מלאי התות במחיר P_0. האם הפדיון P_0Q_0 הוא פדיון מירבי. כדי להשיב נעזר בידע על פדיון שולי, ונתווה את עקומת הפדיון השולי.



תרשים 2.20: מקסום פדיון כאשר קיים מלאי נתון

נווכח שהיות שמתקיים $Q_0 >> {a}/{2b}$; משה מוכר את התות בתחום הפדיון השולי השלילי, ולכן אם יקטין את הכמות הנמכרת סך הפדיון ילך ויעלה.

מה הכמות בה הפדיון מכסימלי? מהדיון הקודם שלנו זו הכמות בה הפדיון השולי שווה לאפס. מה ההשלכות של הפתרון?

משה, בעל החנות, יצטרך להשמיד חלק ממלאי התות; הוא יצטרך להשמיד $Q_0 - {a}/{2b}$. אם יתמלא ברגשי אשם וינסה למכור יותר מ-${a}/{2b}$, יוכל למכור יחידות נוספות רק תוך הפחתת המחיר, ואז יווכח שסך הפדיון פוחת.

אם המלאי שרכש משה קטן מ-${a}/{2b}$, מובן שימכור את המלאי כולו, ולא יצטרך להשמיד תות.

נוכל לשאול: אם משה הכיר מראש את פונקצית הביקוש, למה רכש יותר מ-${a}/{2b}$? גם כמות זו בתנאים מסוימים היא גדולה מדי, כפי שנראה בפרק 7, והוא צריך לחשב מה הכמות האופטימלית למכירה ע"י השוואת עלויות הרכישה והפדיון מהמכירה.