פרק 3:
פונקציית הייצור

3.1 תהליך הייצור

אילו תשומות נדרשות בייצור עגבניות, ובאיזו כמות? האם שינוי כמות המים או העובדים ישנה את כמות העגבניות ובכמה? האם השינוי אפקטיבי בכל רמת תפוקה? נוכל לענות לשאלות אלה אם נבין את תהליך הייצור שהוא הטרנספורמציה של תשומות לתפוקות. תשומות הייצור הן אותם גורמי ייצור, המשתתפים בתהליך הייצור. התשומות הן עבודה, חומרי גלם, טרקטורים, מים; והתפוקות, כדוגמא, הן שולחנות, מכונות או ענבים.

נפריד את התשומות לעבודה, קרקע, הון, טכנולוגיה ויזמות.

במושג עבודה אנו מתייחסים לתשומות העובדים, שהן חלק מהתשומות בתהליך הייצור. נוכל כמובן להתייחס למספר העובדים, אולם לא נוכל להתעלם מאיכותם. מובן, שאין העובדים זהים זה לזה. הם נבדלים באיכותם מבחינת היכולת לבצע מטלות שונות. ייתכן, שהאיכות נובעת מיכולת פיזית שונה, או מהכשרה שונה (פועל ייצור לעומת רופא או מהנדס). גם אם נתייחס לעובדים כאל מוצר הומוגני, זו הפשטה של המציאות המורכבת.

במושג קרקע אנו מתייחסים לשטח הקרקע המשמש בתהליך הייצור. בין אם זהו השטח המעובד כאשר דנים במשק חקלאי, או בשטח המפעל, אם דנים במפעל תעשייתי. בשטח המפעל נכלול גם את שטח המשרדים, שטחי החניה ושטחי גינות הנוי במפעל. הכללה זו נובעת מכך שמבחינת המפעל ההחלטה לדאוג לגינות נוי או לשטחי חניה, נובעת מהידיעה של"שטחים הראוותנים" יש השפעה על גיוס העובדים ועל שביעות רצונם, ולכן גם על תהליך הייצור. לפיכך, כלל שטח המפעל הוא תשומת הקרקע בתהליך הייצור.

הון – עלינו להבחין בין ההון הפיננסי להון הפיזי. ההון הפיננסי זהו הכסף, שהמפעל השתמש בו לרכישת תשומות או לתשלום לתשומות. מקורו של ההון יכול להיות בהלוואות מבנקים, ממכירת אג"ח, או בגיוס הון מהבעלים (הון מניות).
ההון עצמו אינו תשומה בתהליך הייצור, אלא אם המפעל עוסק בממכר שטרות כסף ישנים, או בממכר שרשראות העשויות ממטבעות ישנים. ברוב המפעלים, גיוס ההון הפיננסי מטרתו רכישת הון פיזי – רכישת בניינים, מכונות, מלאי חומרי גלם ועוד. בתהליך הייצור אנו מתעניינים בתשומת ההון הפיזי, כמות המכונות וסוגן, הבניינים במפעל, טיבם וכמות חומרי הגלם.

טכנולוגיה – תהליך הייצור תלוי בטכנולוגיה בה אנו משתמשים. בהכללה, קיימות טכנולוגיות שונות לייצור אותה תפוקה. הטכנולוגיות ייבדלו זו מזו בתשומות הנדרשות בתהליך הייצור. לדוגמא, ניתן לייצר חשמל בטכנולוגיות שונות. ע"י הפעלת טורבינות החשמל בכוח מים, או ע"י שריפת גז, פחם או מזוט.

דוגמא אחרת – ייצור מוצרים חקלאיים במדינות שונות. נראה, שבמדינות אחדות חריש השדות נעשה בעזרת סוסים או שוורים, ובמדינות אחרות בעזרת טרקטורים. מכאן שטכנולוגיית הייצור היא שונה, למרות שהתפוקות הן זהות.
(ניתן לשאול מדוע בתקופות שונות המפעל משנה את טכנולוגיית הייצור או מדוע במדינות שונות באותה תקופה מתקיימות טכנולוגיות שונות, ולשאלה זו נדרש במיקרו-כלכלה).

<u>יזמות</u> – הנכונות לקחת סיכונים להקים וליזום מפעלים חדשים, או לנסות תהליכי ייצור חדשים.
אין היזמות תשומה פיזית המשמשת לכשעצמה בתהליך הייצור, אולם ללא יזמות לא יוכל הייצור להתקיים. ללא היחידים המוכנים לסכן את זמנם וכספם בניסוי הייצור של מוצרים חדשים, לא נראה חדשנות במשק.
נכון שהתגמול ליזמות הוא ברווחים גבוהים, כאשר היוזמה מצליחה, אך הסיכון הוא ניכר ואז ההפסד הוא גדול ונופל על כתפיהם של היזמים.

3.2 <u>פונקציית הייצור</u>

בפונקציית הייצור אנו בוחנים את הטרנספורמציה של תשומות (עבודה, קרקע, מכונות, חומרי גלם וציוד) לתפוקות. בפונקציית הייצור נתייחס רק לתשומות הפיזיות ונניח, שאנו יודעים למדוד לא רק את כמות התשומה, אלא גם את איכותה, ונוכל להציג את התשומות השונות ע"י מדד כמותי.
אנו מניחים, שהטכנולוגיה והיזמות הן תנאים מוקדמים לקיומה של פונקציית הייצור.

נסמן:	תפוקה	(Quantity)	Q –
	עבודה	(Labor)	L –
	קרקע	(Land)	LA –
	הון פיזי – מכונות, ציוד, חומר גלם	(Capital)	K[1] –
	טכנולוגיה	(Technology)	Te –
	יזמות	(Entrepreneurship)	E –

$$Q = f\left(L, LA, K\right)/Te, E$$

כלומר, רשמנו פונקצייה f המראה את הטרנספורמציה של עבודה, קרקע והון פיזי לתפוקה. הפונקציה הזו מותנית (ההתנייה סומנה ע"י "/") בטכנולוגיה וביזמות, משום שבטכנולוגיות שונות הפונקצייה שונה.

נוכל לחשוב על דוגמאות אחדות לפונקציית ייצור:
דוגמא 3.1: ייצור נרות (נסמן ב- Q ונמדוד במספר שלם של נרות שיוצרו). בייצור נרות דקורטיביים נדרשים 100 גרם שעווה (נסמן ב- W ונמדוד בק"ג), פתיל באורך 20 ס"מ (נסמן ב- M

[1] הסימון של הון ב- K, מקורו בכתיבה גרמנית של הון, Kapital, שם ספרו של קרל מרקס (הכרך הראשון יצא לאור ב- 1867, את העבודה על כרכים שני ושלישי השלים פרידריך אנגלס).

ונמדוד במטרים) וחצי שעת עבודה (נסמן ב- L ונמדוד בימי עבודה, כאשר ביום עבודה 8 שעות עבודה).
ידוע לנו שנוכל למכור נרות דקורטיביים רק ביחידות שלמות ואין משמעות לחלקי נר.
נוכל לכתוב את פונקציית הייצור $Q = \min(10W, 5M, 16L)$.
אם בראשית היום ברשותנו 10 ק"ג שעווה, 10 מטר פתיל ועובד אחד, נוכל לייצר 16 נרות בלבד.

מבחינת כמות השעווה נוכל לייצר 100 נרות (משום שמכל ק"ג שעווה נוכל לייצר 10 נרות), מבחינת אורך הפתיל נוכל לייצר 50 נרות (מכל מטר פתיל נוכל לייצר 5 נרות), אולם מספר העובדים הוא המגביל את כלל הייצור. העובד האחד העומד לרשותנו יכול לייצר ביום עבודה רק 16 נרות, וזה מספר הנרות שייוצרו במפעל. אם נגייס עובדים נוספים, נוכל לייצר עד 50 נרות כל עוד לא שינינו את מגבלת הפתיל.
בתהליך ייצור זה גורמי הייצור הם משלימים, ולייצור התפוקה דרושים כלל גורמי הייצור, אחרת התפוקה נקבעת ע"י גורם הייצור המגביל , 'צוואר הבקבוק'.

דוגמא 3.2
פועלים קוטפים תפוחים במטע תפוחים, המטע בעל שטח רב וכמות הפרי על העצים רבה.
מניסיון ידוע לנו, שתפוקת התפוחים (Q, נמדד בק"ג), תלויה במספר העובדים בלבד, L.
אם ידוע לנו שבממוצע פועל קוטף 200 ק"ג תפוחים ביום עבודה, הרי Q=200L.
אם שכרנו פועל אחד, יקטפו 200 ק"ג תפוחים ואם שכרנו עשרה עובדים יקטפו 2 טון תפוחים.
ההנחה, שפונקציית הייצור היא לינארית תידון שוב בסעיפים הבאים ותעודכן.

3.3 __גישת הכלכלן לעומת גישת המהנדס__

המהנדס מתעניין בכלל התשומות הכרוכות בתהליך הייצור, וחוקר את התלות בין קומבינציות שונות של תשומות לכלל התפוקה, בניסיון לחשב את פונקציית הייצור.
הכלכלן מנסה לזהות את תרומתה של התשומה הבודדת לתהליך הייצור – העובד הבודד, גנרטור, קוב מים ועוד, ובוחן את השפעת תשומה בודדת בגישת ה- ceteris paribus.
לדוגמא, הכלכלן האוסף נתונים על ייצור עגבניות, בוחן מה יקרה לסה"כ התפוקה אם נוסיף עוד קוב מים בלבד. האם הוספת המים בהכרח תגדיל את התפוקה, ואולי תפחית אותה. האם ניתן להגדיל את כמות העגבניות רק ע"י הוספת מים. האם כמות העגבניות תגדל גם כאשר שטח הקרקע וכמות השתילים נותרים ללא שינוי, או שיש לשנות כמה תשומות בו זמנית. הכלכלן עושה הפרדה בין *גורמי ייצור* אותם נכנה *משתנים* לבין *גורמי ייצור קבועים*. גורם הייצור המשתנה, בדוגמא זו היא כמות המים, ואילו גורמי הייצור הקבועים הם שטח הקרקע וטיבה, כמות העובדים, כמות הציוד הכבד ועוד.

הגדרה: *גורמי ייצור משתנים* (variable factors)
גורמי ייצור, שעם השינוי בכמותם התפוקה משתנה. נניח שאפשרי לשנות תפוקה בעזרת גורם ייצור אחד בלבד.

הגדרה: *גורמי ייצור קבועים* (fixed factors)
גורמי ייצור, שהם קבועים ברמתם. למרות שגורמי ייצור אלה קבועים בכמותם, התפוקה יכולה להשתנות עם שינוי גורמי הייצור המשתנים.

ההפרדה בין גורמי ייצור קבועים למשתנים היא בעלת משמעות בתלות בטווח הזמן הנדון. נבחין בין טווח קצר לטווח ארוך.

הגדרה: *טווח קצר Short Run*
טווח הזמן בו ניתן לשנות תפוקה ע"י שינוי במספר מינימלי של גורמי ייצור.
נניח בהמשך שהשינוי הוא תוצאה של שינוי בכמות גורם אחד בלבד.

הגדרה: *טווח ארוך Long Run*
טווח הזמן בו משתנים כמה גורמי ייצור.
ככל שטווח הזמן ארוך יותר, משתנים יותר גורמי ייצור.

משך הזמן וחלוקת גורמי הייצור לגורמי ייצור משתנים וקבועים תלויה בתהליך הייצור הנידון.
אם דנים בייצור חשמל, הטווח הארוך בו משתנים כלל גורמי הייצור, הוא טווח הזמן בו נוסיף תחנת כח או נפחית תחנת כח. בשל הזמן הממושך הנדרש בתכנון ובבניית תחנת כח, טווח הזמן במקרה זה הוא 5-10 שנים. אולם לאחר שתחנת כח הוקמה, הייצור בתחנת כח נמשך 25-30 שנה, לפיכך הפחתת תחנה תתרחש בטווח זמן של כשלושים שנה.
אם דנים בגידול פרחים, שזהו גידול עונתי, הטווח הארוך בו נקבע השטח בו נגדל פרחים יכול להשתנות מדי עונת זריעה, ולפיכך הטווח הארוך במקרה זה נמדד בחודשים.

3.4 <u>תרומת גורם ייצור בודד – תפוקה שולית, תפוקה ממוצעת</u>

נוכל לדון בתרומתו של גורם ייצור בודד, רק אם נניח, שזהו גורם הייצור היחיד המשתנה בתהליך הייצור, ואילו כל גורמי הייצור האחרים הם קבועים בכמותם ובאיכותם. מובן, שהתייחסות זו אפשרית רק בטווח הזמן הקצר.

אנו מעוניינים לדעת בכמה יתרום שינוי כמות גורם הייצור הנדון, כלומר, האם הוספת יחידות תגדיל את סה"כ התפוקה או תפחית אותה, ובכמה (למשל, כמות המים בייצור עגבניות).
נכתוב את פונקציית הייצור באופן כללי וממנה נגדיר תפוקה שולית ותפוקה ממוצעת.
פונקציית הייצור הכללית היא:

Q=f(a,b,c,d…)

הגדרה: *תפוקה שולית*, MP, Marginal Product

השינוי בסה"כ התפוקה (ΔQ) עם השינוי בכמות גורם הייצור המשתנה בכמות מזערית (Δa),

או בנוסחאות:

<u>השינוי בסה"כ התפוקה</u>	=	תפוקה שולית של
השינוי בגורם הייצור המשתנה a		גורם ייצור a

$$MP_a = \frac{\Delta Q}{\Delta a}$$

הסימון MP_a מציין שזו התפוקה השולית של גורם ייצור a.

דוגמאות: בכמה תשתנה תפוקת החשמל, אם כל גורמי הייצור קבועים אך נוסיף טון נוסף של פחם, או אלטרנטיבית, אם כל גורמי הייצור קבועים ונוסיף עובד אחד בתהליך הייצור.

הגדרה: *תפוקה ממוצעת* AP, Average Product

סה"כ התפוקה מחולקת בסה"כ גורם ייצור a

$$AP_a = \frac{Q}{a}$$

הסימון AP_a מציין שזו תפוקה ממוצעת של גורם ייצור a.

דוגמאות: בחברת החשמל, התפוקה הממוצעת לעובד - כמה יחידות תפוקה (במונחי חשמל) מייצר עובד אחד מכלל עובדי החברה.

במוסד אקדמי בו a – מספר המרצים ו-Q מספר הסטודנטים, הרי התפוקה הממוצעת למרצה תהיה מספר הסטודנטים למרצה.

3.5 פונקצית הייצור כתלות בגורם ייצור משתנה

בהסתכלות בפונקציות ייצור רבות, נמצא, שקיים דפוס, המאפשר לנו להכליל את התלות של סה"כ התפוקה, בכמות גורם הייצור המשתנה.

רוב הפונקציות אינן לינאריות, ועם העלייה בתשומה, התפוקה אינה עולה בהתאם לאחוז השינוי בתשומה. יש לפיכך לבחון את התלות בפירוט רב, וזאת נבצע ע"י בחינת השינויים הגרפיים והמתמטיים, והבהרת השינויים.

נראה, שבתחום רחב של שינויים בתשומת גורם הייצור, עלייה בתשומה תביא לעלייה בסה"כ התפוקה. עם זאת, קיימות כמויות תשומה, שהוספת יחידות (תשומה) אליהן תביא לירידה בסה"כ הכמות המיוצרת. דהיינו, עם הוספת יחידות התשומה (שהשימוש בהן כרוך בעלויות) סך התפוקה פוחת, למרות שציפינו שיעלה.

נסמן את כמות התשומה המשתנה ב-a ואת התפוקה ב-Q. באופן כללי מתקיים: $Q=f(a)$

עלינו לדייק ולציין שהפונקצייה נבנתה עם פרמטרים: כמויות גורמי הייצור הקבועים, כאשר גורמי הייצור הקבועים הם b,c,d ורמתם הקבועה תסומן ע"י "גג". נניח בנוסף שרמת הטכנולוגיה ורמת היזמות נתונות. לדוגמא בייצור עגבניות: a היא כמות המים, b,c,d הם כמות הקרקע, כמות העובדים וכמות השתילים בהתאמה. טכנולוגיית הייצור והיזמות הם נתונים.

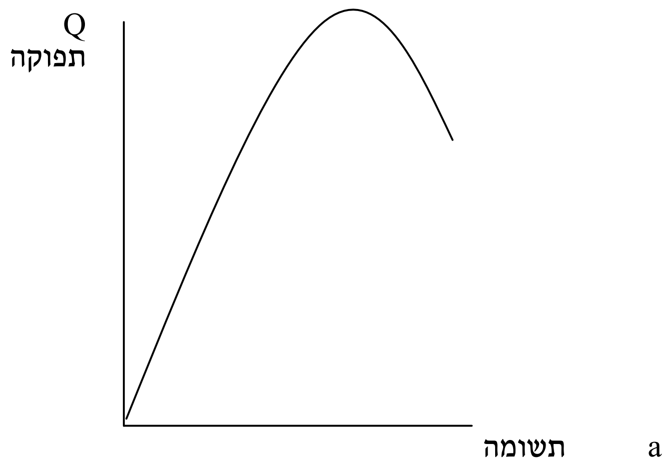
לפיכך נסמן:

$$Q = f\left(a, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\right) / \overline{Te}, \bar{E}$$

מובן, שאם הגורם המשתנה הוא b (מספר העובדים) ואילו גורמי הייצור הקבועים ברמתם הם $\bar{a}, \bar{c}, \bar{d}$, אזי פונקציית הייצור תהיה

$$Q = f\left(\overline{a}, b, \overline{c}, \overline{d}\right) / \overline{Te}, \overline{E}$$

נצייר את התלות בין Q ל - a בתרשים 3.1 כאשר התפוקה (תנובת העגבניות בק"ג) תמדד בציר האנכי, ואילו התשומה המשתנה (כמות המים בקוב) תימדד בציר האופקי .



תרשים 3.1: תלותה של התפוקה בגורם ייצור משתנה

עלינו לשאול את עצמנו מה נוכל ללמוד מהגרף על התלות בין גורם הייצור המשתנה וסה"כ התפוקה.
נראה שבתחום מסוים הגדלת התשומה תורמת לסה"כ התפוקה, אך בתחום אחר הגדלת התשומה מפחיתה מסה"כ התפוקה.

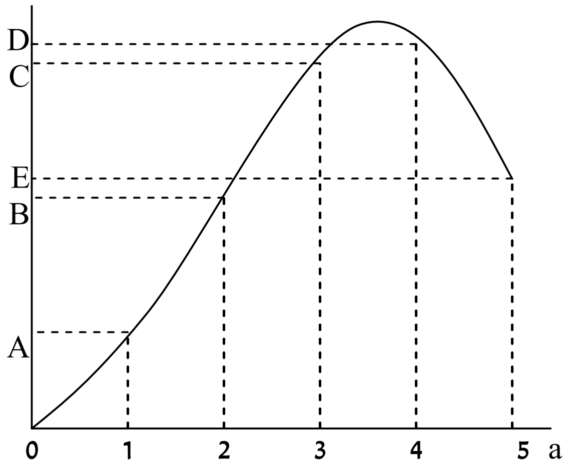
3.5.1 <u>מדידה גרפית של התפוקה השולית, מקרה בדיד</u>

נוכל למדוד את השינויים בתחומים השונים של השפעת התשומה, על פני הגרף, על ידי התפוקה השולית שאותה הגדרנו.

$$MP_a = \frac{\Delta Q}{\Delta a}$$

נחלק את הציר האופקי למרווחים שווים (נניח שכל אחד בגודל יחידה, קוב אחד של מים) ונראה את השינוי בתפוקה על פני הציר האנכי.
ביחידות הראשוניות של תוספת תשומה נראה שתוספות התפוקה הולכות ועולות. משלב מסויים התוספות הולכות ופוחתות ובשלב האחרון התפוקה הולכת ופוחתת, דהיינו התוספות שליליות. ואמנם מתקיים, שהיות שהתוספות האופקיות הן שוות, נוכל ללמוד על השינויים בתפוקה השולית מתוך התוספות האנכיות.

בשלב הראשון מתקיים $\overline{BA} > \overline{A0} > 0$, דהיינו, תוספת התפוקה, עם הוספת יחידה נוספת של תשומה, היא חיובית והתוספת הולכת ועולה.



תרשים 3.2: תפוקה שולית פוחתת של גורם ייצור a

בשלב הבא מתקיים $0 < \overline{DC} < \overline{CB}$, $\overline{CB} < \overline{BA}$

קיימת תוספת תפוקה חיובית, אולם היא קטנה יותר בגודלה מהתוספת של יחידות התשומה הקודמות.

בשלב האחרון מתקיים $\overline{DE} < 0$:

דהיינו, התפוקה השולית היא שלילית.

דוגמא 3.3: תפוקה שולית עולה, פוחתת ושלילית

דוגמא לשינויים בערך התפוקה השולית היא הכנת ארוחה להרבה מידידינו. לעיתים, לאחר שהזמנו ידידים לארוחה, חלקם מתנדבים לעזור לנו, ועלינו לשאול את עצמנו, האם כדאי לנו לקבל עזרה, ואם כן, מה המספר המרבי של עוזרים.

נזכור שהמטבח שלנו בעל שטח נתון וכן כלי הבישול נתונים, ואלה גורמי הייצור הקבועים; כמות העובדים משתנה כרצוננו, וזה גורם הייצור המשתנה.

עם בואם של המתנדבים הראשונים נוצרת חלוקת עבודה, וכל אחד מהעובדים מתמחה בשלב אחר של תהליך הייצור. בשלב זה התפוקה של שני אנשים גדולה מפעמיים התפוקה של עובד בודד, ותפוקת שלושה אנשים גדולה משלוש פעמים התפוקה של עובד בודד. אין זה משום ששמעון עובד טוב ממשה. אלא שבשל היותם שניים או שלושה – ההתמחות אפשרית, והתפוקה גדלה במהירות (שלב התפוקה השולית העולה).

עם הצטרפם של מתנדבים נוספים, נוצר מחסור בכלים להכנת האוכל, ונוצרת צפיפות במטבח הקבוע בגודלו. היחס בין גורמי הייצור המשתנים (העובדים) לגורמי הייצור הקבועים (המטבח וכלי הכנת האוכל), נעשה גדול מדי, וסביר, שהצפיפות והדוחק יגרמו למצב של תפוקה שולית פוחתת, ומשלב מסוים שלילית.

גם אם כל חברינו רוצים לעזור בהכנת הארוחה, יהיה עדיף, שחלק יביאו מנות מוכנות מביתם, ורק מיעוטם יצטרפו אלינו להכנה במטבח בביתנו. מובן, שגודל המטבח יקבע את המספר המתאים של העוזרים, אחרת אנו עלולים להשאר עם אורחים אך ללא ארוחה.

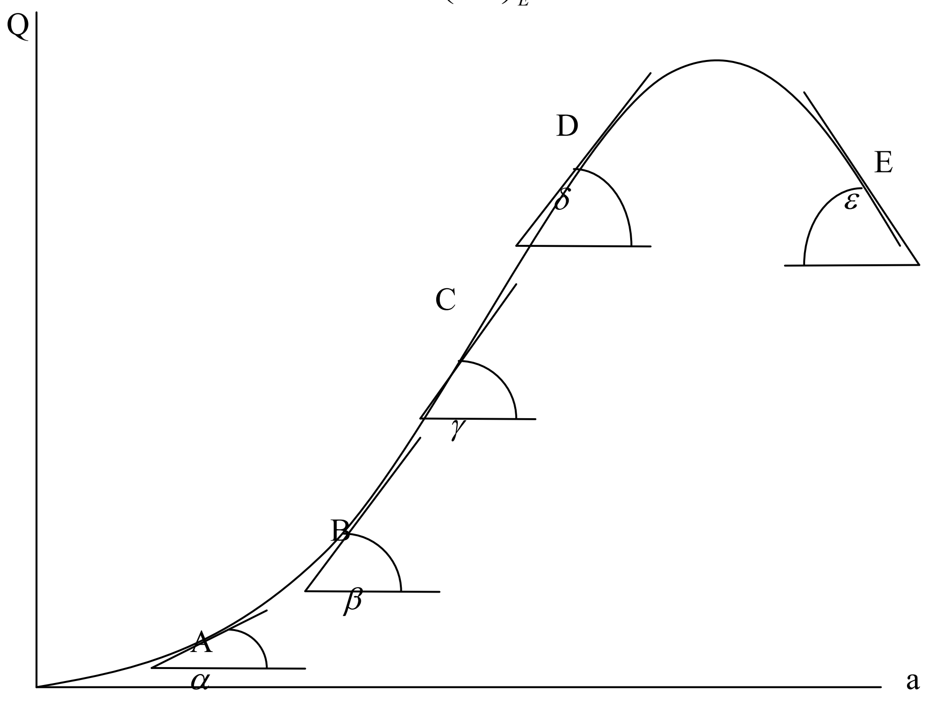
3.5.2 מדידה גרפית של תפוקה שולית- מקרה רציף

נוכל למדוד את התפוקה השולית כאשר נבצע שינויים קטנים בכמות a, כאשר השינוי בתשומה אינפיניטיסימלי $(da \to 0)$. היחס בין השינוי בתפוקה לשינוי בתשומה, במקרה זה, יכול להמדד ע"י dQ/da, זווית המשיק בנקודות שונות לאורך העקומה.

נסמן בתרשים 3.3 נקודות שונות לאורך העקומה A,B,C,D,E. בכל אחת מהנקודות נעביר משיק לפונקציית התפוקה ונסמן את זווית המשיק ע"י $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$. בתחום התפוקה השולית (החיובית) העולה מתקיים $0 < tg\alpha = \left(\frac{dQ}{da}\right)_A < \left(\frac{dQ}{da}\right)_B = tg\beta$

בתחום התפוקה השולית (החיובית) הפוחתת מתקיים $tg\gamma = \left(\frac{dQ}{da}\right)_C > \left(\frac{dQ}{da}\right)_D = tg\delta > 0$

ובתחום התפוקה השולית השלילית מתקיים $0 > \left(\frac{dQ}{da}\right)_E = tg\varepsilon$



תרשים 3.3: התפוקה כפונקציה של התשומה, ותפוקות שוליות הנמדדות ע"י משיקים לעקומה.

3.6 הקשר בין פונקצית הייצור לעקומת התפוקה השולית

נראה, שלפונקצית הייצור שלושה תחומים, בהתאם לעקומת התפוקה השולית (תרשים 3.4).

I פונקצית הייצור עולה, והעקומה היא קעורה.

II פונקציית הייצור עולה, והעקומה היא קמורה.

III פונקציית הייצור יורדת.

לשלושת התחומים מקבילים תחומים בעקומת התפוקה השולית.

<u>בתחום I מתקיים:</u>

$$MP_a = \frac{dQ}{da} > 0, \quad \frac{dMP_a}{da} = \frac{d^2Q}{da^2} > 0$$

לפיכך, בתחום זה התפוקה השולית חיובית ועולה. למסקנה זו הגענו גם מהסתכלות על השינויים בזווית המשיק לעקומת פונקצית הייצור, כפי שראינו בתרשים 3.3 אשר בתחום זה ערכה הולך ועולה.

<u>בתחום II מתקיים:</u>

$$MP_a = \frac{dQ}{da} > 0, \quad \frac{dMP_a}{da} = \frac{d^2Q}{da^2} < 0$$

לפיכך, בתחום זה התפוקה השולית חיובית ויורדת. למסקנה זו הגענו גם מהסתכלות בזווית המשיק לעקומה, אשר בתחום זה ערכה הולך ופוחת, אולם טנגנס הזווית עדיין חיובי בערכו.

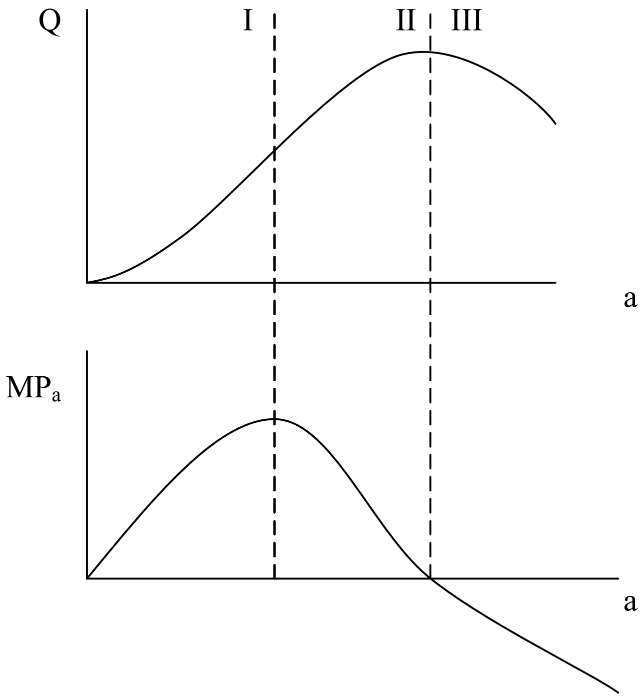
<u>בתחום III מתקיים:</u>

$$MP_a = \frac{dQ}{da} < 0, \quad \frac{dMP_a}{da} = \frac{d^2Q}{da^2} < 0$$

בתחום זה התפוקה השולית שלילית. זאת כיוון שזווית המשיק לעקומת הייצור בתחום זה היא שלילית.

<u>מהו המעבר בין התחומים:</u>

במעבר מתחום I לתחום II $MP_a>0$, אולם $\frac{d^2Q}{da^2} = 0$, דהיינו, אנו נמצאים בנקודת פיתול. זוהי



תרשים 3.4: היחס בין התפוקה לכמות התשומה, ועקומת התפוקה השולית הנגזרת ממנה.

כמות התשומה בה התפוקה השולית מרבית. נראה להלן, שבתוך תחום II נמצא המקסימום של פונקצית התפוקה הממוצעת, AP_a , המתקבל כאשר $MP_a = AP_a$.
המעבר מתחום II לתחום III הוא כאשר $MP_a=0$, כלומר פונקציית הייצור היא במכסימום, ועם הגדלת התשומה סה"כ התפוקה פוחתת.

<u>דוגמא מספרית, דוגמא 3.4:</u>
ידוע, שבמפעל לייצור גרביים הבניין והמכונות הם גורמי הייצור הקבועים, אך ניתן לשכור עובדים מדי יום. כלכלן המפעל חישב את התלות בין מספר העובדים לסך התפוקה, במכונה A, נתונים המובאים בטבלה 3.1. בטבלה אופן חישוב תפוקה שולית ותפוקה ממוצעת.

כאשר Q_i סה"כ תפוקה של i עובדים, MP_i (APi) תפוקה שולית (ממוצעת) של העובד ה-i.
ערכי התפוקה השולית חושבו ע"י $MP_n= Q_n-Q_{n-1}$
ערכי התפוקה הממוצעת חושבו ע"י $AP_n= Q_n /n$

טבלה 3.1 : התלות בין תפוקה למספר עובדים, תפוקה שולית וממוצעת

מספר העובדים	סה"כ תפוקה	תפוקה ממוצעת	תפוקה שולית
0	0	לא מוגדר	
1	20	20	20
2	50	25	30
3	65	21.7	15
4	70	17.5	5
5	70	14	0
6	60	10	10-

נראה, שעם הוספת העובדים הראשון והשני התפוקה השולית היא חיובית ועולה: 30 גדול מ- 20. בהוספת העובדים השלישי והרביעי התפוקה השולית חיובית, אך פוחתת; בעובד החמישי התפוקה השולית היא אפס, ובהוספת העובד השישי התפוקה השולית שלילית. אין ספק, לכל היותר כדאי להעסיק ארבעה עובדים ליד מכונה זו, אם נעסיק יותר מארבעה עובדים נישא בעלויות שכר גבוהות יותר, אולם התפוקה לא תגדל, ולכן הרווח שלנו יפחת. מה ידוע לנו על התפוקה הממוצעת? היא חיובית תמיד, אך לעיתים עולה ולעיתים יורדת.

3.7 יישום לעקרון התפוקה השולית

3.7.1 דוגמא 3.5: מכונות עם תפוקה בדידה

התפוקה השולית יכולה לעזור לנו בהשגת מכסימום תפוקה ע"י הקצאה נכונה של גורם הייצור המשתנה בין גורמי הייצור הקבועים.

נניח, שקיימות שתי מכונות A ו-B, שבכל אחת התפוקות של עובדים הן שונות ונתונות ע"י הטבלה הבאה.

טבלה 3.2: תפוקות ותפוקות שוליות בשתי מכונות

מספר עובדים	מכונה A		מכונה B	
	סה"כ תפוקה	תפוקה שולית	סה"כ תפוקה	תפוקה שולית
0	0		0	
1	20	20	35	35
2	35	15	60	25
3	45	10	75	15
4	50	5	85	10
5	50	0	80	5-
6	45	5-	75	10-

אנו מעונינים להשיג מכסימום תפוקה ע"י הקצאת העובדים בין שתי המכונות.

נניח, שלרשותנו חמישה עובדים. אם כלל העובדים יעבדו במכונה A, סה"כ התפוקה תהיה 50. מהסתכלות בנתונים ברור, שהעובד החמישי אינו מוסיף לסה"כ התפוקה; לפיכך נוכל לייצר 50 יחידות במכונה זו עם 4 עובדים, והעובד החמישי יעבור למכונה B וייצר שם 35 יחידות. סה"כ התפוקה תהיה 85 שהיא עדיפה על 50 יחידות (התפוקה הושגה ע"י הקצאת ארבעה עובדים למכונה A ועובד אחד למכונה B.)

השאלה היא האם נוכל לשנות את הקצאת העובדים בין המכונות ולייצר תפוקה גדולה יותר. מה המכסימום שניתן לייצר במכונות A, B וחמישה עובדים? נזכור, שסה"כ התפוקה שווה לסכום התפוקות השוליות, ועתה נשתמש בידע זה.

הקצאת העובד הראשון למכונה B תתן 35 יחידות תפוקה והיא עדיפה על הקצאתו למכונה A הנותנת 20 יחידות. העובד השני יוקצה אף הוא למכונה B בה התפוקה השולית של העובד השני היא 25 לעומת ה- 20 שנקבל במכונה A. את העובד השלישי עדיף להקצות למכונה A, במכונה זו עתה עובד אחד וסה"כ התפוקה המיוצרת 20, לעומת 15 יחידות אותן היה מייצר לו היה "עובד שלישי" במכונה B.

באופן זה נמשיך ונקצה את העובדים. נקבל בסה"כ 110 יחידות, וזה ודאי עדיף על החישובים הקודמים 50 ו- 85 יחידות.

נסכם ונכליל מתוך הדוגמא, שהקצאה בהתאם לתפוקה השולית המכסימלית היא שתתן לנו סה"כ תפוקה מכסימלית.

יש לציין, שעקרון זה פועל רק בתחום התפוקות השוליות הפוחתות, ואינו פועל אם קיים תחום של תפוקות שוליות עולות. במקרה האחרון יש לחשב ולהשוות את כל האפשרויות של הקצאת עובדים.

טבלה 3.3 : הקצאת עובדים בין מכונות

מספר עובדים	התפוקה השולית למכונה		**סה"כ התפוקה**
	מכונה A	מכונה B	
1		35	35
2		25	60
3	20		80
4	15		95
5		15	110
6		10	120
7	10		130
8	5		135

3.7.2 דוגמא 3.6: מכונות עם תפוקה רציפה

נניח שפונקציות הייצור בשתי המכונות הן כדלהלן:

$$Q_A = \sqrt{L_A}$$

$$Q_B = L_B$$

במשק עשרה עובדים ומתקיים $L_A+L_B=10$

תשומת העבודה נמדדת בימי עבודה, ויתכן שעובד מועסק פחות מיום שלם ליד אחת מהמכונות.

איך יש להקצות את העובדים בין המכונות?

הבעיה שלפנינו היא:

$$\max\ (Q_A + Q_B)$$

$$\text{s.t} \quad L_A+L_B=10$$

לאחר הצבה נקבל:

$$Q_A + Q_B = \sqrt{L_A} + (10 - L_A);$$

נקבל מכסימום לפונקציה כאשר הנגזרת הראשונה של הפונקציה שווה לאפס והנגזרת השניה שלילית. נחשב את הנגזרת הראשונה ונשווה לאפס:

$$\frac{d}{dL_A}\left[\sqrt{L_A}+\left(10-L_A\right)\right]=0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{L_A}}-1=0$$

$$\sqrt{L_A}=\frac{1}{2}\Rightarrow L_A=\frac{1}{4},\quad L_B=9\frac{3}{4}$$

בהקצאה אופטימלית סך התפוקה הוא 10.25:

$$Q_A=\frac{1}{2},\quad Q_B=9\tfrac{3}{4},\quad Q_A+Q_B=10\frac{1}{4}$$

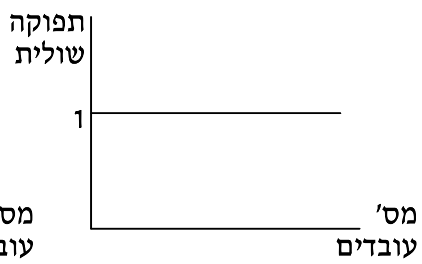
הפתרון שחישבנו עדיף על העסקת כל העובדים באחת מהמכונות בלבד:

אם עשרת העובדים יועסקו במכונה A סך התפוקה יהיה $\sqrt{10}$.

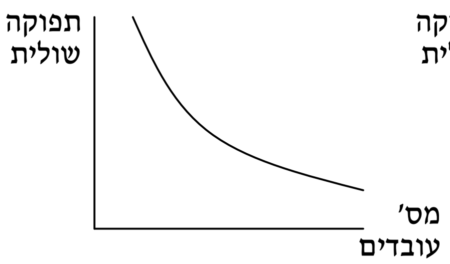
אם עשרת העובדים יועסקו במכונה B סך התפוקה יהיה 10.

3.7.2.1 <u>פתרון גרפי – מכונות עם תפוקה רציפה</u>

נצייר את התפוקות השוליות של העובדים בהתאם לדוגמא 3.6.



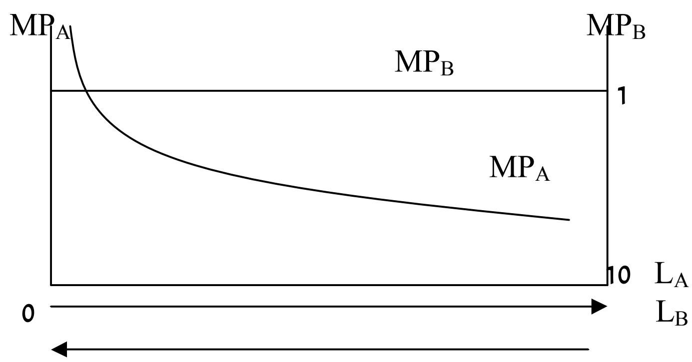
מכונה B: תפוקה שולית לעומת מספר עובדים



מכונה A: תפוקה שולית לעומת מספר עובדים

תרשים 3.5: תפוקה שולית במכונות שונות

כדי למצוא את הקצאת העובדים בין המכונות נצייר את התפוקות השוליות בשתי המכונות על פני גרף אחד, בתרשים 3.6 בו אורך הציר האופקי שווה למגבלת העובדים $L_0=10$. התפוקה



תרשים 3.6: הקצאת העובדים כאשר במשק יש עשרה עובדים

השולית של a תלויה במספר העובדים הנמדד משמאל לימין. ואילו, התפוקה השולית של b, התלויה אף היא במספר העובדים, נמדדת מימין לשמאל.

כדאי להעסיק עובדים במכונה A, רק כאשר התפוקה השולית בה גדולה מהתפוקה השולית במכונה B (השווה בדוגמא שלנו תמיד ל- 1). כאשר התפוקה השולית במכונה A נמוכה יותר, נעדיף להעביר עובדים למכונה B. העברת העובדים ממכונה אחת לאחרת תעשה בנקודת החיתוך בין שתי עקומות התפוקה השולית.

3.7.3 <u>יישום לעקרון התפוקה השולית – מכונות עם תפוקה רציפה - הכללה</u>

התפוקה השולית, השונה בתהליכי ייצור, יכולה לשמש אותנו בהקצאת גורם ייצור משתנה, אשר נמצא במחסור, בין גורמי הייצור הקבועים.

נניח שקיימות שתי מכונות A ו-B, שבכל אחת התפוקות (Q_A, Q_B) של העובדים (L) הן שונות.

$Q_A=f_A(L)$

$Q_B=f_B(L)$

אם נסמן את מספר העובדים בכל מכונה ב- L_A, L_B, הרי סה"כ העובדים הוא

$L_A+L_B=L_0$

ולפיכך מתקיים $L_B=L_0-L_A$

נראה שהקצאה יעילה של העובדים, תתקיים כאשר התפוקה השולית לעובד זהה בשתי המכונות.

$$Q_A+Q_B=\left[f_A(L_A)+f_B(L_0-L_A)\right]$$

נחשב את מכסימום סה"כ התפוקה ע"י חישוב נגזרת לפי L_A והשוואתה לאפס.

$$\frac{d(Q_A+Q_B)}{dL_A}=\frac{d[f_A(L_A)+f_B(L_0-L_A)]}{dL_A}$$

נסמן:

$$\frac{df_A}{dL_A}=MP_L^A\,,\quad \frac{df_B}{dL_A}=MP_L^B$$

הנגזרת של סה"כ התפוקה היא:

$$\frac{d(Q_A+Q_B)}{dL_A}=MP_L^A-MP_L^B=0\Rightarrow MP_L^A=MP_L^B$$

כפי שציפינו, הקצאת גורם הייצור המשתנה תתן תפוקה מכסימלית, אם התפוקה השולית של גורם הייצור שווה בשני תהליכי הייצור.

3.8 תפוקה ממוצעת

נוכל לחשב את התפוקה הממוצעת מתוך גרף המתאר את סה"כ התפוקה כתלות בגורם ייצור משתנה.

את התפוקה הממוצעת הגדרנו:

$$AP_a=\frac{\text{סה"כ התפוקה}}{\text{כמות גורם הייצור המשתנה}}$$

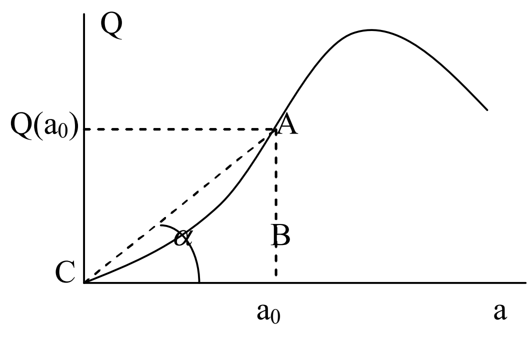
כאשר משתמשים בכמות גורם הייצור a_0, התפוקה המיוצרת היא $Q(a_0)$, והתפוקה הממוצעת ברמת תשומה זו היא $Q(a_0)\,/\,a_0$.

נפנה לתרשים 3.7.

סה"כ התפוקה תמדד ע"י המרחק האנכי $\overline{AB}$; קו העזר $\overline{AC}$, הוא קרן מנקודה A אל הראשית.

המרחק האופקי $\overline{BC}$ מודד את כמות התשומה.

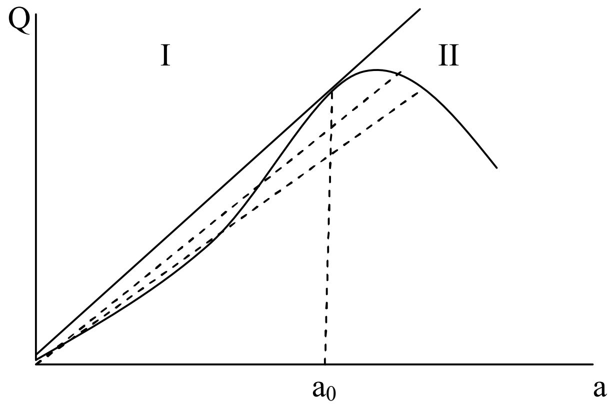
התפוקה הממוצעת הנמדדת ע"י היחס $\overline{AB}/\overline{BC}$ יכולה להמדד ע"י טנגנס זווית הקרן אל הראשית, $tg\alpha$.



תרשים 3.7: מדידת התפוקה הממוצעת ברמת תשומה נתונה ע"י קרן אל הראשית

3.8.1 <u>הקשר בין פונקציית הייצור לתפוקה הממוצעת</u>

כדי לבחון את השתנות התפוקה הממוצעת עם שינוי כמות גורם הייצור נחבר נקודות שונות בפונקציות הייצור ונבחן את השינוי בזווית הקרן אל הראשית.



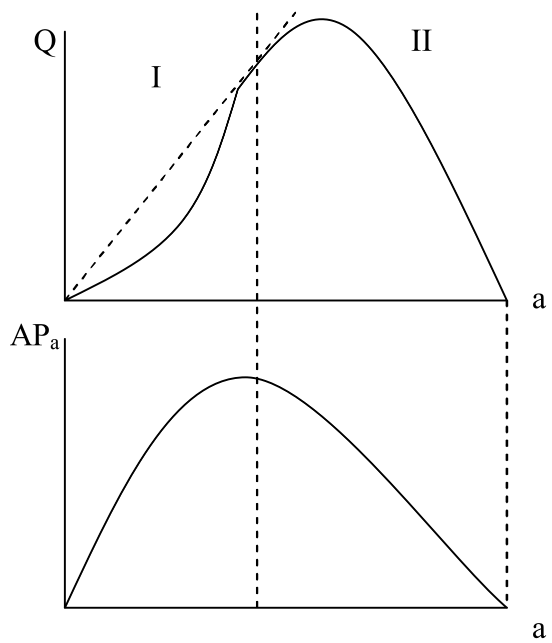
תרשים 3.8: השתנות התפוקה הממוצעת עם שינוי התשומה.

<u>עקומת התפוקה הממוצעת</u>

<u>תחום I</u> (ראה בתרשים 3.8 $0<a<a_0$) אם נחבר נקודות שונות על פני העקומה אל הראשית, הרי שזווית הקרן הולכת ועולה, ולפיכך טנגנס הזווית הולך ועולה (פונקציית טנגנס היא פונקצייה מונוטונית) . לכן נסיק, שהתפוקה הממוצעת הולכת ועולה.

<u>תחום II</u> (ראה בתרשים 3.8, $a>a_0$) נראה, שזווית הקרן הולכת ופוחתת, ולפיכך טנגנס הזווית הולך ופוחת. לכן נסיק, שהתפוקה הממוצעת הולכת ופוחתת.

התפוקה הממוצעת שווה לאפס בשתי נקודות: אם כמות גורם הייצור היא אפס, ולכן אין מייצרים כלל תפוקה, או אם הוספנו כל כך הרבה יחידות מגורם הייצור המשתנה, שהתפוקה השולית השלילית מקזזת את התוספות החיוביות.



תרשים 3.9: סה"כ התפוקה, והתפוקה הממוצעת הנגזרת ממנה.

מהו המעבר מתחום I לתחום II? הנקודה בה התפוקה הממוצעת המכסימלית, כאשר הקרן אל הראשית מתלכדת עם המשיק לפונקציית הייצור(נוכיח מתמטית בסעיף 3.9).

3.9 הקשר בין התפוקה השולית לתפוקה הממוצעת

אנו מתעניינים בקשר בין שתי העקומות. כלומר, האם עקומת התפוקה השולית גבוהה/נמוכה מעקומת התפוקה הממוצעת ובאילו תחומים.

למציאת קשר זה נחפש את התחומים של פונקציית התפוקה הממוצעת.

התפוקה הממוצעת שווה ל: $AP_a = \frac{Q}{a}$ =(u/v)

נחשב את הנגזרת של הפונקציה. הואיל ודנים בנגזרת של מנה, $\frac{u}{v}$, הנגזרת שווה ל- $\frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\frac{d}{da}\left(\frac{Q}{a}\right) = \frac{\frac{dQ}{da} * a - Q\frac{da}{da}}{a^2} = \frac{MP_a * a - Q}{a^2} = \frac{MP_a - \frac{Q}{a}}{a} = \frac{MP_a - AP_a}{a}$$

כידוע לנו, הנגזרות של הפונקציה מלמדות אותנו על התחומים של הפונקציה:

כאשר הנגזרת הראשונה חיובית, הפונקציה עולה.

כאשר הנגזרת הראשונה שלילית, הפונקציה יורדת.

כאשר הנגזרת הראשונה שווה לאפס, הפונקציה בנקודת אקסטרמום. אם הפונקציה השנייה שלילית, הרי זהו מכסימום, ואם הפונקציה השניה חיובית, הרי זהו מינימום.

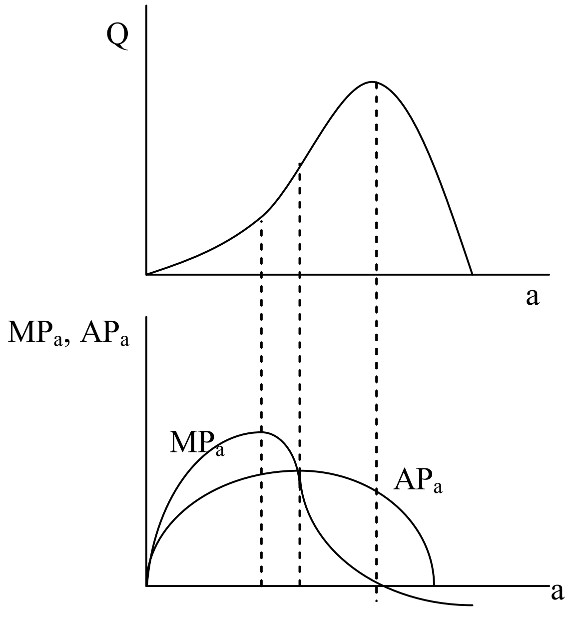
נסיק לגבי השיפוע של פונקציית התפוקה הממוצעת את המסקנות הבאות:

$$\frac{dAP_a}{da} = \frac{MP_a - AP_a}{a} = \begin{cases} >0 & MP_a > AP_a \\ =0 & MP_a = AP_a \\ <0 & MP_a < AP_a \end{cases}$$

כל עוד התפוקה השולית גדולה מהתפוקה הממוצעת, התפוקה הממוצעת עולה.

כאשר התפוקה השולית קטנה מהתפוקה הממוצעת, התפוקה הממוצעת פוחתת.

כאשר התפוקה השולית שווה לתפוקה הממוצעת, התפוקה הממוצעת בנקודת אקסטרמום – מקסימום.



תרשים 3.10: פונקצית הייצור כתלות בכמות גורם ייצור משתנה ופונקציות התפוקה השולית והתפוקה הממוצעת הנגזרות ממנה.

3.10 מה משמעות היחס בין התפוקה לתשומות?

התפוקה השולית היא חיובית בחלקה, דהיינו, נראה גידול בסה"כ התפוקה עם הגדלת כמות a, ואילו בחלק אחר היא שלילית, דהיינו, הגדלת כמות a מקטינה את סה"כ התפוקה ולא כדאי להגדיל את כמות a לרמה זו. תופעה זו מייצגת את היחסים בין גורמי הייצור המשתנים לבין גורמי הייצור הקבועים. היות שגורמי הייצור הקבועים אינם משתנים בכמותם, היחס בין גורמי הייצור המשתנים והקבועים הולך ועולה עם הגדלת כמויות גורמי ייצור משתנים (ביחס לקבועים), והעלאת כמותם מגדילה את התפוקה במהירות. ואילו בשלבים המאוחרים יש עודף גורמי ייצור משתנים ביחס לקבועים, התפוקה מתחילה לפחות, ויש להפחית את כמות גורמי הייצור המשתנים. הגענו לשלב של אבטלה סמויה. ניתן לייצר את אותה רמת תפוקה עם כמות קטנה יותר של גורמי ייצור משתנים ללא שינוי בכמות גורמי הייצור הקבועים (כמובן שהפחתת כמות גורם ייצור a תגרור עמה הפחתה בעלויות הייצור).

סיבה אחרת לשינויים בערכי התפוקה השולית הם היחסים בין גורמי הייצור המשתנים עצמם, ובמיוחד נוגע הדבר בעבודה, כאשר שיתוף פעולה מאפשר התמחות של גורמי הייצור, ולכן נוצר שלב של תפוקה שולית עולה, אולם יתרון זה אינו נמשך לאורך זמן.

3.11 פונקצית הייצור בטווח ארוך

ככל שטווח הזמן נעשה ארוך, יותר גורמי ייצור הופכים מקבועים למשתנים. ניתן להגדיל את הכמות של חלק מגורמי הייצור, או ניתן להפחית את חלקם. כל שינוי כזה יגרום לתזוזה של פונקציית הייצור שהניחה כפרמטרים $\left(\bar{b},\bar{c},\bar{d}\right)$;

נדון במקרה פרטי בו משנים את כל גורמי הייצור בפרופורציה קבועה. נניח שני גורמי ייצור בלבד – עבודה והון.

נסמן עבודה – L (labor), הון – K (capital)

פונקציית הייצור מקיימת Q=f(L,K)

נניח שמגדילים את כל גורמי הייצור בקבוע λ (למשל $\lambda = 2$), ונטען שהשינוי בתפוקה הוא α.

$$Q_0 = f\left(L_0, K_0\right)$$

$$Q_1 = f\left(\lambda L_0, \lambda K_0\right) = \alpha Q_0$$

הערך של α הוא שיקבע את השינוי בסה"כ התפוקה, לדוגמא, כאשר $\alpha > 1$: $Q_1 = \alpha Q_0 > Q_0$

דוגמא: אם פונקציית הייצור היא

$$Q_0 = L^{1/3} K^{1/3}$$

הגדלת כמות כל גורמי הייצור פי λ, תגרום להגדלת התפוקה בפחות מפי λ.

$$Q_1 = (\lambda L)^{1/3} (\lambda K)^{1/3} = \lambda^{2/3}\left(L^{1/3} K^{1/3}\right) < \lambda Q_0$$

אולם אם פונקציית הייצור היא

$$Q_0 = L^{2/3} K^{2/3}$$

הרי נקבל הגדלת תפוקה ביותר מפי λ.
ואילו אם פונקציית הייצור היא

$$Q_0 = L^{1/3} K^{2/3}$$

הרי הגדלת התפוקה תהיה בדיוק פי λ.

בפונקציית ייצור מסוג זה, המכונה פונקציית קוב-דוגלס (Cobb Douglas Production Function), סכום המקדמים הוא שיקבע את ערכו של α.

לפונקציית הייצור בטווח הארוך השלכות על עלויות הייצור, אליהן נחזור בפרק 4.